MATHEMATIQUES POUR LA PHYSIQUE EN PC/PC*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

1. Somme et différence d'angles

• $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$,
• $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$,
• $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$,
• $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

2. Expression en fonction des angles doubles

• $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$,
• $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$,
• $2\sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$.

3. Produits de fonctions trigonométriques

• $2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$,
• $2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$,
• $2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$.

4. Somme et différence de fonctions trigonométriques

• $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2]\cos[(\alpha - \beta)/2]$,
• $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha - \beta)/2]\cos[(\alpha + \beta)/2]$,
• $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha + \beta)/2]\cos[(\alpha - \beta)/2]$,
• $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha + \beta)/2]\sin[(\alpha - \beta)/2]$.

5. Formes exponentielles

• $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, avec $i^2 = -1$,
• $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
• $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

DEVELOPPEMENTS LIMITES

• $f(x+a) = f(a) + (x-a)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=a} + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!}\left.\frac{d^kf}{dx^k}\right|_{x=a} + \cdots$
• $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)/2!\; x^2 + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k!\; x^k + \ldots$
• $\sin\alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \alpha^5/5! \ldots + (-1)^p \alpha^{2p+1}/(2p+1)! + \ldots$,
• $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2! + \alpha^4/4! \ldots + (-1)^p \alpha^{2p}/(2p)! + \ldots$,
• $\exp\alpha = 1 + \alpha + \alpha^2/2! + \ldots + \alpha^k/k! + \ldots$.

RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

1. Equation différentielle du premier ordre à coefficient constant : $\frac{dy}{dt}(t) + ay(t) = b$ [1]

La solution unique de cette équation est la somme de la solution particulière (SP) et la solution de l'équation homogène (SH)

La solution de l'équation homogène (ou sans second membre) $\frac{dy}{dt}(t) + ay(t) = 0$ est de la forme :
$y_{SH}(t) = Ae^{-at}$ avec A une constante
On recherche une solution particulière en essayant y =Cte.
Il vient immédiatement que la solution particulière s'écrit : $y_{SP}(t) = b/a$

La solution générale de [1] est donc : $y(t) = y_{SH}(t) + y_{SP}(t) = Ae^{-at} + b/a$.

La constante A est déterminée par les conditions initiales.
Ex : $y(t_0) = y_0 = Ae^{-at_0} + b/a$ $\rightarrow$ $A = (y_0 - b/a)e^{at_0}$
On obtient : $y(t) = (y_0 - b/a)e^{-a(t-t_0)} + b/a$

2. Equation différentielle du premier ordre linéaire : $\frac{dy}{dt}(t) + a(t)y(t) = b(t)$ [2]

La solution de l'équation [2] est unique. Pour la déterminer, on résout d'abord l'équation homogène
$\frac{dy}{dt}(t) + a(t)y(t) = 0$ [3] par séparation des variables.
$\frac{dy}{dt}(t) = -a(t)y(t)$ soit $\frac{dy}{y(t)} = -a(t)dt$ ce qui donne : $\ln(y(t)) = -\int a(t)dt + Cste$

La solution de l'équation homogène [3] est donc de la forme : $y(t) = Ce^{-A(t)}$

- avec $A(t) = \int a(t)dt$ primitive de la fonction $a(t)$
- avec C une constante

La solution de l'équation [2] s'obtient par la méthode de variation de la constante. Cette méthode consiste à remplacer la constante d'intégration C par une fonction C(t). On injecte $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$ dans l'équation [2]
$\frac{dy}{dt}(t) + a(t)y(t) = \frac{dC}{dt}(t)e^{-A(t)} - \frac{dA}{dt}(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)y(t) = \frac{dC}{dt}(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t) + a(t)y(t) = b(t)$
On en déduit que la solution de [2] vérifie la relation : $\frac{dC}{dt}(t)e^{-A(t)} = b(t)$ soit $\frac{dC}{dt}(t) = b(t)e^{A(t)}$.
On en déduit que : $C(t) = \int_{t_0}^{t} b(t')e^{A(t')}\,dt' + C(t_0)$.
La solution est donc de la forme : $y(t) = C(t)e^{-A(t)} = \int_{t_0}^{t} b(t')e^{A(t')}dt'e^{-A(t)} + C(t_0)e^{-A(t)}$

La constante $C(t_0)$ est déterminée par les conditions initiales id. $y(t_0) = C(t_0)e^{-A(t_0)}$
On obtient : $y(t) = C(t)e^{-A(t)} = \int_{t_0}^{t} b(t')e^{A(t')}dt'e^{-A(t)} + y_0e^{-(A(t)-A(t_0))}$

3. Equation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants : $\frac{d^2y}{dt^2}(t)(t) + a\frac{dy}{dt}(t)(t) + by(t) = f(t)$ [4]

Cette équation est souvent paramétrisée sous la forme : $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}(t) + {\omega_0}^2y(t) = f(t)$

La solution de cette équation est unique.

On recherche d'abord la solution de l'équation homogène : $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}(t) + {\omega_0}^2y(t) = 0$ [5]

qui correspond au régime d'oscillation libre. En recherchant une solution de la forme $y(t) \propto e^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$. Le signe du discriminant de l'équation caractéristique permet de distinguer trois types de solutions correspondant à trois types de régime.

a) Régime apériodique où le discriminant est positif : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 > 0$ ou encore $Q < \frac{1}{2}$

On pose : $\Omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$.

L'équation caractéristique possède deux racines distinctes : $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \Omega$

La solution est donc de la forme : $y_H(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(\mathrm{A}'\cosh(\Omega \mathrm{t}) + \mathrm{AB}'\sinh(\Omega \mathrm{t}))$

avec *A*, *B* ou *A'*, *B'* les constantes d'intégrations

b) Régime critique où le discriminant est nul: $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$

L'équation caractéristique possède une racine double: $r = -\omega_0$

La solution est donc de la forme : $y_H(t) = e^{-\omega_0 t}(A\mathrm{t} + B)$ avec *A*, *B* les constantes d'intégrations

Ce régime correspond à l'amortissement du système le plus efficace

c) Régime pseudo périodique où le discriminant est négatif : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 < 0$ ou encore $Q > \frac{1}{2}$

On pose : $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes :

$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega$

La solution est donc de la forme : $y_H(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(\mathrm{A}'\cos(\Omega \mathrm{t}) + \mathrm{B}'\sinh(\Omega \mathrm{t}))$

avec *A*, *B* ou *A'*, *B'* les constantes d'intégrations

Pour résoudre l'équation [4], on ajoute à la solution de l'équation homogène [5] $y_H(t)$ obtenue précédemment la solution particulière $y_P(t)$ correspondant au second membre *f*(*t*).

- Si *f*(*t*) est une constante, alors la solution particulière $y_P(t)$ est une constante
- Si *f*(*t*) est une fonction sinusoïdale et en particulier si $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$, le second membre finit par imposer au système sa pulsation d'oscillation.
  La solution particulière correspond au régime forcé que l'on peut obtenir en utilisant la notation complexe : $\underline{y_P}(t) = \underline{Y_P}e^{i\omega t}$ et $y_P(t) = Re\left(\underline{y_P}(t)\right)$.
  On remarque que : $\frac{d\underline{y_P}(t)}{dt}(t) = i\omega\underline{Y_P}e^{i\omega t} = i\omega\underline{y_P}(t)$ et $\frac{d^2\underline{y_P}(t)}{dt^2}(t) = (i\omega)^2\underline{y_P}(t) = -\omega^2\underline{y_P}(t)$
  On obtient l'expression complexe de [4] en injectant la forme complexe précédente.

  $-\omega^2\underline{y_P}(t) + i\frac{\omega_0}{Q}\underline{y_P}(t) + {\omega_0}^2\underline{y_P}(t) = Fe^{i\varphi}e^{i\omega t}$ soit : $\underline{y_P}(t) = \frac{Fe^{i\omega t}}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0}{Q}}$

  On obtient alors la solution particulière : $y_P(t) = Re\left(\underline{y_P}(t)\right) = Re\left(\frac{Fe^{i\varphi}e^{i\omega t}}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0}{Q}}\right)$