Observation du mouvement : l'essentiel

1. Référentiel

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace 3D qui l'environne. Il lui faut, pour déterminer la nature du mouvement, connaître la position du point au cours du temps. L'observateur doit se repérer dans l'espace et dans le temps.

Un référentiel est un observateur, réel ou fictif, muni d'un repère et d'une horloge.

Se repérer dans un système de coordonnées : voir ci-après la définition des coordonnées

Vecteur position en coordonnées cartésienne : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

2. Vecteur vitesse (unité m.s^{-1})

On définit alors la vitesse instantanée dans le référentiel R par :

$$\vec{v}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \quad \text{soit} \quad \vec{v}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$$

Expression en coordonnées cartésienne :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

Expression en coordonnées polaire (mouvement plan) :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

3. Vecteur accélération (unité m.s^{-2})

On définit alors le vecteur accélération instantané dans le référentiel R par :

$$\vec{a}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R$$

Expression en coordonnées cartésienne :

$$\vec{v} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

Expression en coordonnées polaire (mouvement plan) :

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{u_r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{u_r} + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{u_\theta}$$

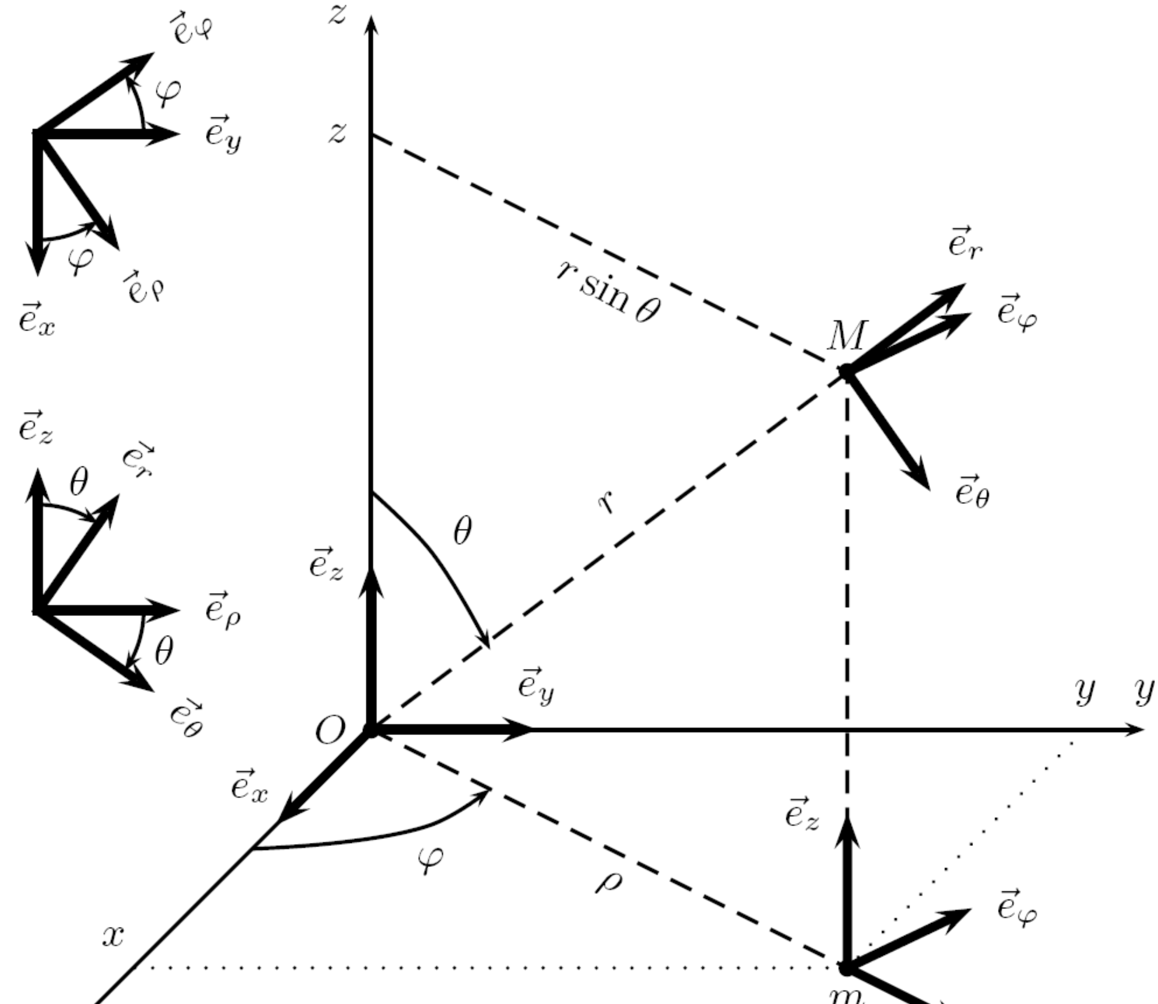
Rotation pour une trajectoire circulaire de rayon R :

Vitesse angulaire : $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ **Lien avec la vitesse :** $\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$

Rotation uniforme : $\omega = Cte$

Accélération pour une rotation uniforme : $\vec{a} = -R(\dot{\theta})^2\overrightarrow{u_r} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$

Systèmes de coordonnées orthogonaux



$$\rho = Om \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$
$$r = OM \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi,\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi$$
$$\vec{e}_r = \vec{e}_z \cos\theta + \vec{e}_\rho \sin\theta,\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z \sin\theta + \vec{e}_\rho \cos\theta$$
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,\ \rho = r\sin\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z\ ;\ \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\rho\vec{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z\ ;\ \mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho \times \mathrm{d}\varphi \times \mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi\ ;\ \mathrm{d}\tau = r^2\,\mathrm{d}r \times \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}\varphi$$

Attention : dans ce feuillet $\vec{e}$ désigne la même chose que $\vec{u}$, c'est-à-dire un vecteur unitaire