

Energétique des systèmes mécaniques

I. Grandeurs cinétiques d'un système mécanique

1. Quantité de mouvement

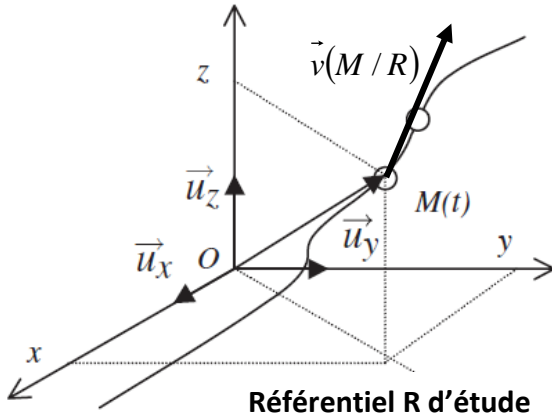


Figure 1 : Position du problème dans un référentiel R d'étude

N. B. $\vec{i} = \vec{u}_x$; $\vec{j} = \vec{u}_y$; $\vec{k} = \vec{u}_z$

On définit la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m animée d'un vecteur vitesse dans un référentiel R par l'expression : $\vec{p}(M/R) = m\vec{v}(M/R)$ ou plus succinctement $\vec{p} = m\vec{v}$.

Remarque : pour un ensemble de points matériel M_i de masse m_i , il faut additionner les différentes contributions. On définit alors la quantité de mouvement globale du système ou résultante cinétique : $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

2. Moment cinétique

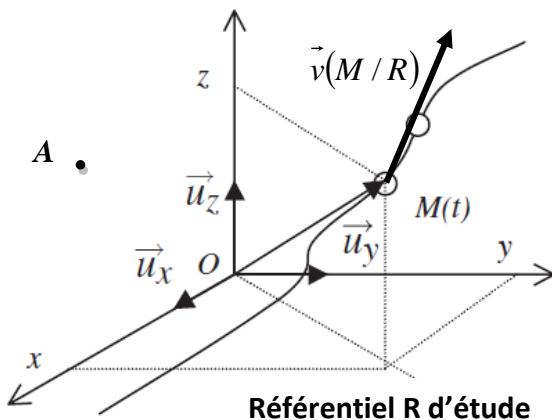


Figure 2 : Position du moment cinétique relativement à un point A dans un référentiel R d'étude

N. B. $\vec{i} = \vec{u}_x$; $\vec{j} = \vec{u}_y$; $\vec{k} = \vec{u}_z$

On définit le moment cinétique d'un point matériel de masse m animée d'un vecteur vitesse dans un référentiel R par l'expression : $\vec{L}(A/R) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/R) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$ ou plus succinctement $\vec{L}(A/R) = \vec{AM} \wedge \vec{p} = \vec{AM} \wedge m\vec{v}$.

Remarque : pour un ensemble de points matériel M_i de masse m_i , il faut additionner les différentes contributions. On définit alors le moment cinétique global du système: $\vec{L}(A/R) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

3. Energie cinétique

Pour un point matériel de masse m se déplaçant avec un vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$ dans un référentiel R , nous poserons que l'énergie cinétique de ce point est $E_{c/R} = \frac{1}{2} m v^2 (M/R)$.

Plus succinctement, on écrira : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

Une énergie s'exprime en Joules (J).

Remarque : pour un ensemble de points matériel M_i de masse m_i , il faut additionner les différentes contributions à l'énergie cinétique. On définit alors l'énergie cinétique totale du système:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Remarque très importante : Les grandeurs cinétiques comme la quantité de mouvement, le moment cinétique ou l'énergie cinétique sont toujours définis relativement à un observateur ou plus exactement un référentiel.

II. Interactions conservatives et non conservatives : modélisation

1. Systèmes mécaniques en interaction

a) Modélisation

La modélisation des interactions mécaniques est assurée par des vecteurs forces notés \vec{F} .

Un vecteur force est caractérisé par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme notée $\|\vec{F}\|$
- Un point d'application

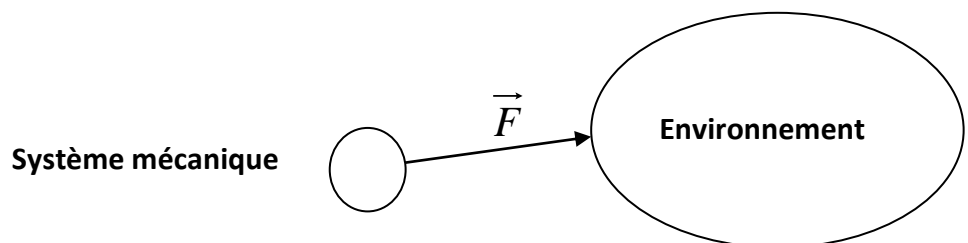


Figure 3 : Vecteur Force

b) Exemples d'interaction :

On peut citer :

- Le poids d'un objet : interaction d'un objet massif dans le champ de pesanteur terrestre ;
- L'action d'un support qui se décompose en une force de réaction normale au support et une force tangente appelée force de frottement solide ;
- Les forces de frottements fluides ;
- L'interaction gravitationnelle (force fondamentale) ;
- Les interactions électromagnétiques (forces fondamentales) dont l'interaction électrostatique coulombienne.

c) Principe des actions réciproques :

Deux situations :

1. Deux skateboarders sont placés face à face et on la main posée l'une contre l'autre. Le skater mauve pousse sur la main du skater orange, qui lui n'exerce aucune pression. On observe que les deux skateboards se mettent en mouvement selon la même direction (horizontale) et dans des sens opposés.
2. Un skateboarder pousse horizontalement sur le mur et il se met en mouvement dans le sens opposé.

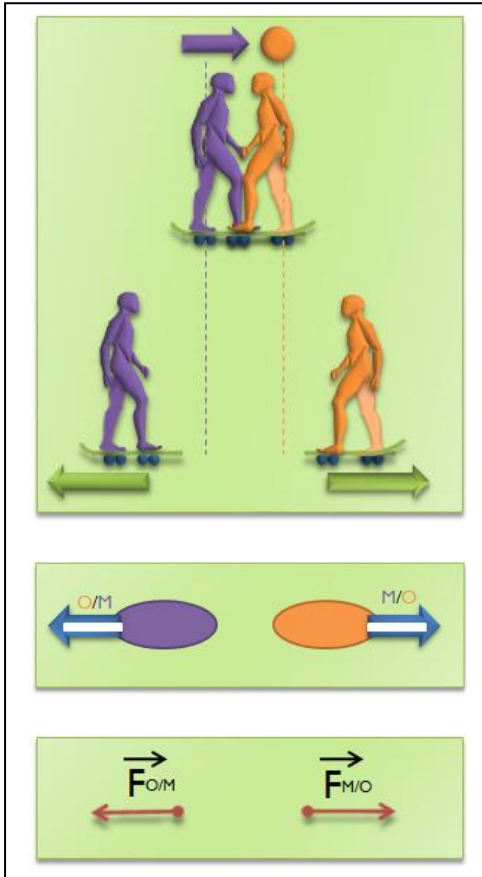


Figure 4.a : Deux skateboarders sont placés face à face

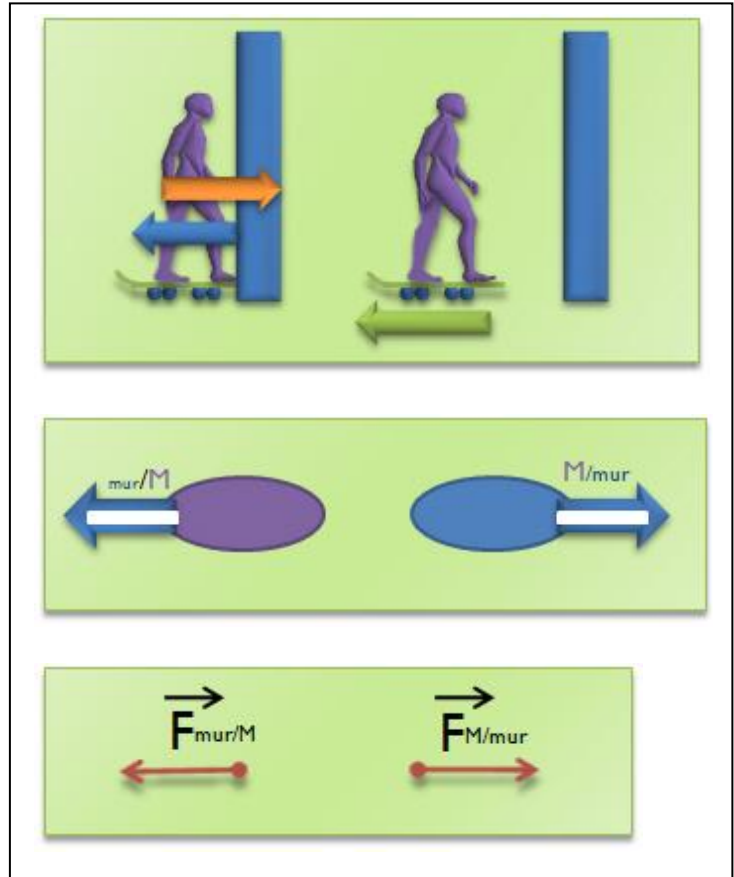


Figure 4.b : Skateboarders s'appuyant sur un mur

Conclusion

Ces deux expériences montrent que lorsqu' un objet A exerce une force sur un objet B, l'objet B exerce une force sur l'objet A de même direction et de sens opposés de même intensité. $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$

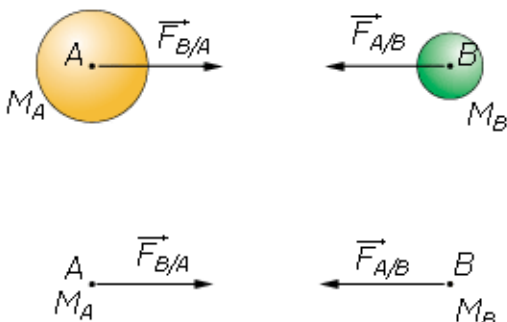


Figure 5 : Action réciproques

Principe des actions réciproques

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B . Ces forces ont :

- la même droite d'action
- des sens opposés
- la même intensité ou norme.

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$$

Remarque :

Le principe des actions réciproques est vérifié pour les actions à distance (force électrostatique, force gravitationnelle) mais aussi de contact.

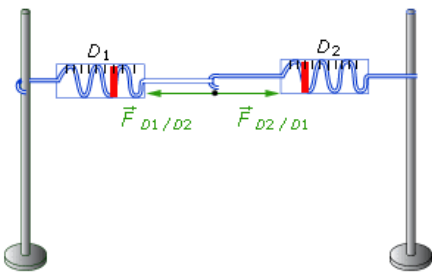


Figure 6 : Action réciproques des actions de contact

2. Puissance d'une force

On peut exprimer la puissance reçue par le système mécanique soumis à une force ou résultante de force \vec{F} et donc le mouvement peut être réduit à celui d'un point matériel M de vecteur vitesse \vec{v} .

Elle s'exprime avec la formule $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Une puissance est une grandeur qui s'exprime en Watts (symbole W).

L'énoncé de ce théorème s'applique pour les systèmes mécaniques dans les cas où le mouvement se réduit à celui de son centre de masse G. C'est l'exemple des systèmes mécaniques solide en translation de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_G$.

3. Lien entre la puissance d'une force et l'énergie cinétique – théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique (Admis – on le démontra ultérieurement)

Dans un référentiel galiléen, la puissance instantanée de la résultante des forces \vec{F} exercées sur M est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique. On peut écrire :

$$\frac{dE_C}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance est une quantité d'énergie cédée ou reçue par unité de temps.
Elle s'exprime donc en $J \cdot s^{-1}$ ou Watt (symbole W).

Signe des échanges de puissance :

Lorsque la puissance est reçue par le système : $P \geq 0$.

Lorsque le système mécanique cède de la puissance : $P \leq 0$

4. Energie potentielle d'un système conservatif (forces conservatives)

La modélisation des interactions conservatives peut être aussi modélisée par une énergie potentielle notée E_p associée à sa force \vec{F} , dite conservative. On dit alors que les forces conservatives dérivent d'une énergie potentielle.

On verra ultérieurement que l'on peut aussi exprimer le lien explicite entre la force et l'énergie potentielle dont – elle dérive à l'aide du vecteur gradient : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

5. Puissance d'une force dérivant d'une énergie potentielle.

La puissance mécanique d'une force conservative est donnée par : $P = -\frac{dE_p}{dt}$.

On retiendra que une force est conservative (on dit aussi qu'elle dérive d'une énergie potentielle) s'il existe une fonction $E_p(M) = E_p(x, y, z)$ appelée énergie potentielle telle que la puissance de cette

force peut s'écrire : $P_C = -\frac{dE_p}{dt}$.

L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près sans signification physique particulière. On peut dès lors définir la constante en question comme on le souhaite.

6. Quelques exemples

a) Système mécanique placé dans un champ de pesanteur

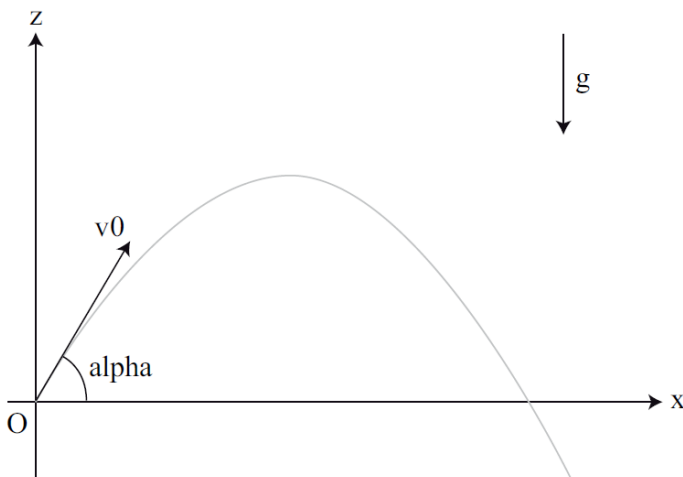


Figure 7 : Mouvement d'un point matériel dans un champ de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(M)$ associée au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un point matériel M, s'écrit $E_{pp}(M) = E_{pp}(z) = mgz + Cte$.

Pour déterminer la constante, on fixe une valeur particulière de E_{pp} , par exemple $E_{pp}(z=0) = 0$ nous donne $Cte = 0$.

Attention à l'orientation des axes :

E_{pp} change de signe si l'orientation de (Oz) change de sens.

Expression de la force de pesanteur en fonction de l'énergie potentielle :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u}_z$$

On verra dans la suite du cours que cette relation est un cas particulier de $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

b) Déformation élastique d'un système masse – ressort

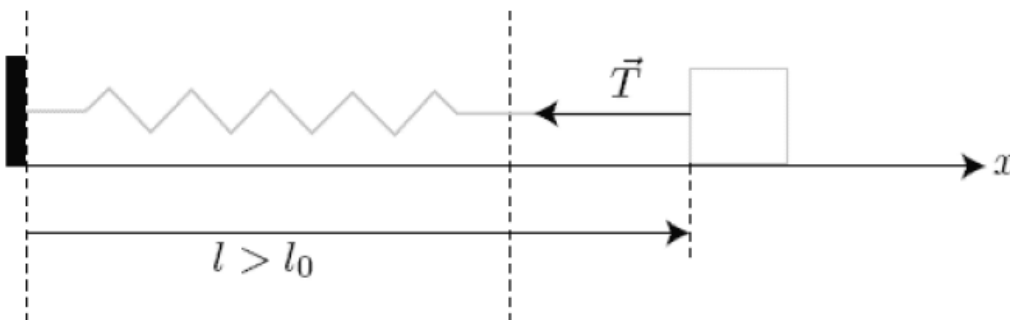


Figure 8 : Déformation élastique d'un ressort

On désigne par la grandeur algébrique $x = l - l_0$ la déformation du ressort.

Cas d'école : déformation élastique d'un ressort

Un ressort est un système mécanique possédant une longueur à vide l_0 .

On désigne par la grandeur algébrique $x = l - l_0$ la déformation du ressort.

Un ressort exerce une action mécanique (de contact) dite de rappel dans le sens opposé à la déformation et dont la norme ou intensité est proportionnelle à la déformation : $F_{el} = k|l - l_0|$

La constante k est la raideur du ressort. Elle se mesure en $N.m^{-1}$.

Dans le système d'axe de la figure 8 ; on peut par conséquent écrire que : $\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$ ou encore $\vec{F}_{el} = -k x \vec{u}_x$.

Energie potentielle élastique de déformation d'un ressort

Pour retrouver l'énergie potentielle associée à la déformation, on peut rechercher une fonction

énergie potentielle E_{pel} telle que : $\vec{F}_{el} = -\frac{dE_{pel}}{dx}\vec{u}_x$

En exprimant la force, on obtient : $-k x \vec{u}_x = -\frac{dE_{pel}}{dx}\vec{u}_x$.

En projetant sur \vec{u}_x , on a : $\frac{dE_{pel}}{dx} = k x$.

On intègre par rapport à la variable d'espace x : $E_{pel} = \frac{1}{2}k x^2 + Cte$

L'énergie potentielle élastique de déformation d'un ressort est donné par :

$$E_{pel} = \frac{1}{2}k x^2 + Cte = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + Cte$$

c) Forces de frottements fluides

Un corps en mouvement dans un fluide exerce une force de frottement dite fluide sur un système mécanique. Elle communique une force dirigée dans la même direction que le mouvement mais dans un sens opposé. Sa norme ou intensité dépend de la vitesse.

Son vecteur force s'écrit : $\vec{F}_f = -f v^{\alpha-1} \vec{v}$ avec $\alpha \geq 1$

A faible vitesse, en général, on peut considérer que $\alpha = 1$ que la viscosité du fluide impose que :

$$\vec{F}_f \approx -f \vec{v}$$

La puissance d'une force de frottement s'écrit : $P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -f v^{\alpha+1}$

La puissance est négative : les forces de frottements fluides sont de nature dissipatives car elle font perdre de la puissance au système mécanique.

Cette force n'est pas conservative car on ne peut trouver de fonction énergie potentielle E_p telle

que l'on puisse écrire $P_f = -\frac{dE_p}{dt}$.

Toutes les forces ne sont pas conservatives.

III. Energie mécanique

1. Définition de l'énergie mécanique

On définit l'énergie mécanique comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E_m = E_c + E_p$. (unité J)

2. Théorème de la puissance mécanique

On suppose dans la suite que l'on étudie un système mécanique dont le mouvement est assimilable à celui d'un point matériel dans un référentiel R galiléen.

Toutes les forces n'étant pas conservatives, on peut procéder à une décomposition de la puissance des forces en distinguant les forces conservatives des forces non conservatives :

$$P = P_C + P_{NC}.$$

Dans cette expression P_C désigne la puissance des forces conservatives et P_{NC} celle des forces non conservatives.

L'étude précédente montre que l'on peut écrire deux équations :

- Le théorème de la puissance cinétique pour lequel : $P = \frac{dE_c}{dt}$
- La définition de la puissance d'une force conservative : $P_C = -\frac{dE_p}{dt}$

Par conséquent, on peut donc écrire que : $P = P_C + P_{NC} = -\frac{dE_p}{dt} + P_{NC}$.

On en déduit que : $P + \frac{dE_p}{dt} = P_{NC}$.

Par ailleurs, on a vu que $P = \frac{dE_c}{dt}$ et donc on écrira $\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) = P_{NC}$

On reconnaît dans cette expression l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$.

Il vient : $\frac{dE_m}{dt} = P_{NC}$

Théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives : $\frac{dE_m}{dt} = P_{NC}$

3. Cas des systèmes conservatifs : conservation de l'énergie mécanique

Si un système mécanique est soumis uniquement à l'influence de forces conservatives, les forces non conservatives ne travaillent pas. La puissance des actions non conservatives est nulle.

D'après le théorème de la puissance mécanique $\frac{dE_m}{dt} = P_{NC} = 0$.

On en déduit que la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est nulle.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow E_m = Cte$$

L'énergie mécanique est constante au cours du temps : elle est conservée.

Un système mécanique est soumis uniquement à l'influence de forces conservatives possède une énergie mécanique qui se conserve lors de son évolution : $E_m = Cte$

On peut dès lors identifier quelques cas de conservation de l'énergie mécanique :

- La chute libre sous l'influence du champ de pesanteur dans la mesure où l'on peut négliger les frottements atmosphériques
- Le mouvement d'oscillation d'un pendule dans la mesure où l'on peut négliger les frottements atmosphériques
- Oscillation d'un ressort sans frottement solide ou fluide dissipatif
- Situation d'interaction coulombienne et gravitationnelle dans le vide

IV. Positions d'équilibre d'un système dynamique

1. Positions d'équilibre

a) Equilibre stable

On considère le cas d'école de l'oscillateur harmonique horizontal de la figure 8 dont l'énergie potentielle élastique est donnée par : $E_{p\text{él}} = \frac{1}{2}kx^2$ en prenant $Cte = 0$.

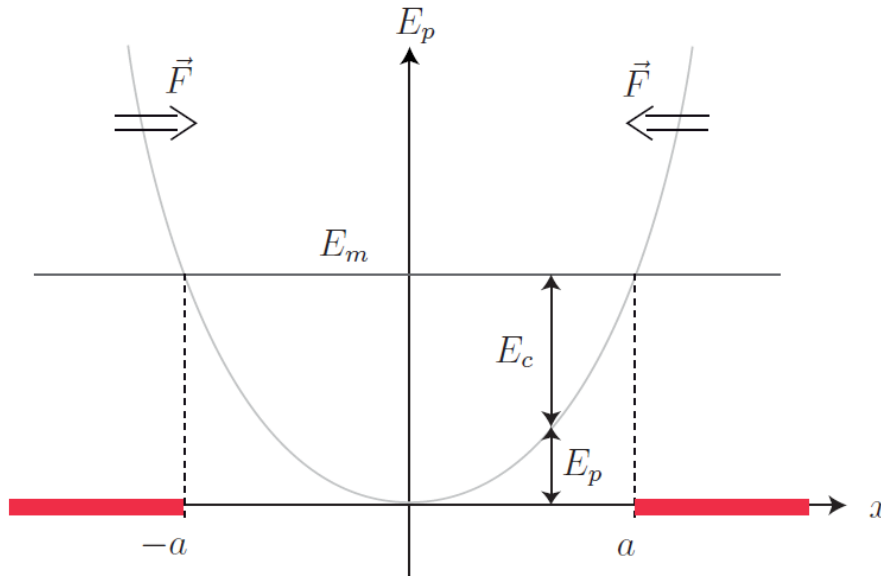


Figure 9 : Energie potentielle élastique d'un ressort

On désigne par la grandeur algébrique $x = l - l_0$ la déformation du ressort.

L'énergie potentielle est minimale en $x = 0$.

Animation :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html

Le système est conservatif, l'énergie mécanique est par conséquent conservée.

On peut donc écrire que : $E_m = E_c + E_{p\text{él}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Cte$

On voit par ailleurs que $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$.

On en déduit que $E_{p\text{él}} = E_m - E_c \leq E_m$ car l'énergie cinétique est positive.

On voit sur la courbe de la figure 8 que la valeur maximale accessible pour l'énergie potentielle est E_m .

Le mouvement doit respecter cette condition à tout instant : on voit que cela est possible sur la courbe si et seulement si $-a \leq x \leq +a$. **La trajectoire du système mécanique est donc bornée.**

On remarque en outre que l'énergie potentielle est minimale en $x = 0$.

On peut calculer la force de rappel du ressort avec : $\vec{F} = -\frac{dE_{p\text{él}}}{dx}\vec{u}_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

On voit que la projection de cette force s'écrit : $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -kx$.

Dès que l'on s'écarte de la position $x = 0$, on voit que :

- Si $x > 0$ alors $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -kx < 0$; la force de rappel ramène le système vers $x = 0$.
- Si $x < 0$ alors $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -kx > 0$; la force de rappel ramène le système vers $x = 0$.

Conclusion :

La position $x = 0$, correspondant au minimum d'énergie potentielle, est une position d'équilibre stable pour le ressort.

b) Equilibre instable

On considère un pendule simple assimilé à un point matériel de masse m attaché à une potence par un fil inextensible de longueur l . Ce problème est conservatif dans la mesure où l'on néglige les frottements fluides sur l'atmosphère environnante. Le système possède un seul degré de liberté correspondant à l'angle θ .

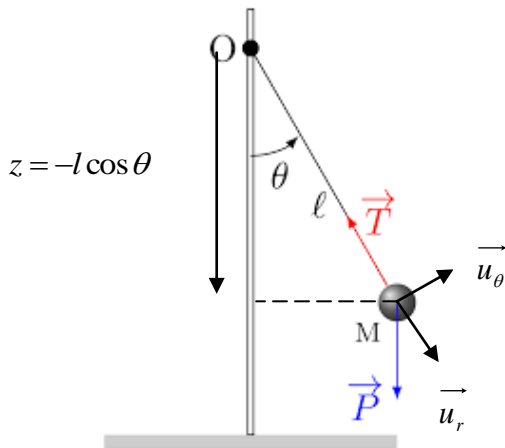


Figure 10 : Pendule simple

La cote z est donné par la projection :

$$z = -l \cos \theta$$

Animation : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.html

On doit exprimer toutes les grandeurs énergétiques en fonction de θ .

L'énergie cinétique du système s'écrit : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle du système est une énergie potentielle de pesanteur : $E_{pel} = mgz + Cte$

On voit que la cote z est donné par la projection : $z = -l \cos \theta$.

On en déduit que : $E_{pel}(\theta) = -mgl \cos \theta + Cte$

On peut choisir une valeur de la constante particulière comme on le souhaite en imposant $E_{pel}(\theta) = 0$.

Ceci revient alors à imposer : $E_{pel}(\theta = 0) = -mgl + Cte = 0$ soit $Cte = mgl$.

L'énergie potentielle s'exprime alors de la façon suivante : $E_{pel}(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$.

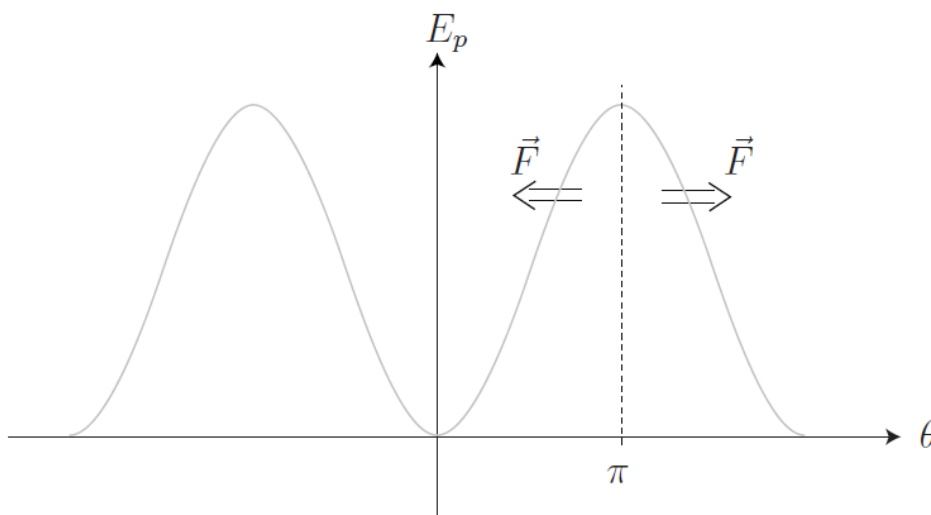


Figure 11 : Energie potentielle du pendule simple

On calcule la force résultante le long du mouvement (direction de \vec{u}_θ) :

$$F_\theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_\theta = mg \cdot \vec{u}_\theta = -mg \sin \theta$$

(i) Minimum d'énergie potentielle : $\theta = 0$

Comme pour le ressort, $\theta = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le pendule. En effet, le champ de pesanteur ramène toujours le pendule vers sa position d'équilibre.

Démonstration :

Dès que l'on s'écarte de la position $\theta = 0$, on voit que :

- Si $\theta > 0$ alors $F_\theta = -mg \sin \theta < 0$; la force de pesanteur ramène le pendule vers $\theta = 0$.
- Si $\theta < 0$ alors $F_\theta = -mg \sin \theta > 0$; la force de pesanteur ramène le pendule vers $\theta = 0$.

(ii) Maximum d'énergie potentielle : $\theta = \pi$

Par contre pour le ressort, $\theta = \pi$, le maximum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre instable pour le pendule. En effet, le champ de pesanteur écarte toujours le pendule vers de sa position initiale.

Démonstration :

Dès que l'on s'écarte de la position $\theta = \pi$, on voit que :

- Si $\theta > \pi$ alors $F_\theta = -mg \sin \theta > 0$; la force de pesanteur écarte le pendule de $\theta = \pi$.
- Si $\theta < \pi$ alors $F_\theta = -mg \sin \theta < 0$; la force de pesanteur écarte le pendule de $\theta = \pi$.

La position $\theta = \pi$ correspondant au maximum d'énergie potentielle est instable. On parle d'état d'équilibre instable.

c) Généralisation

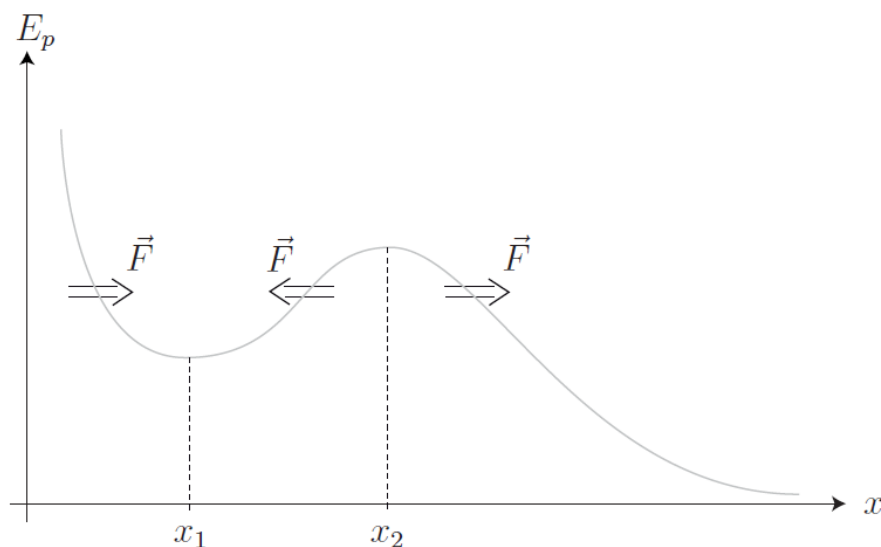


Figure 12 : Energie potentielle d'un système quelconque – problème à une dimension

Une position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle pour laquelle : $\frac{dE_p}{dx} = 0$.

Un minimum d'énergie potentielle, pour lequel on a simultanément $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$, correspond à une position d'équilibre stable. Lorsque le système s'écarte d'une position d'équilibre stable la force résultante ramène toujours le système vers sa position d'équilibre initiale. Sur la figure 12, $x = x_1$ est une position d'équilibre stable.

Un maximum d'énergie potentielle, pour lequel on a simultanément $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$, correspond à une position d'équilibre instable. Lorsque le système s'écarte d'une position d'équilibre instable, la force résultante écarte toujours le système de sa position initiale. Sur la figure 12, $x = x_2$ est une position d'équilibre instable.

d) Prédiction du caractère borné ou non borné de la trajectoire :

Suivant la valeur de l'énergie mécanique E_m d'un système conservatif, plusieurs types de trajectoires sont possibles.

(i) Si $E_m < E_p(x_1)$ ou si $E_m > E_{p,max}$, le système peut s'échapper vers les $x > 0$, on a un **état de diffusion**.

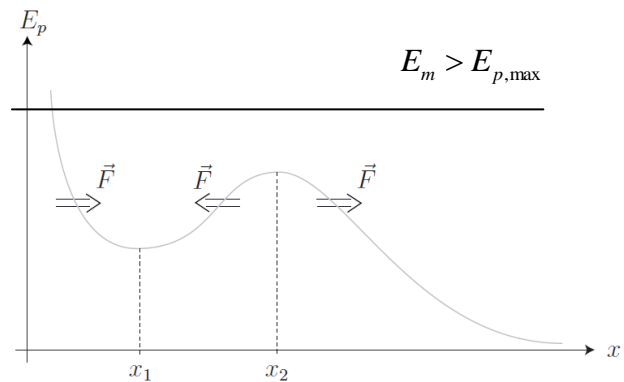
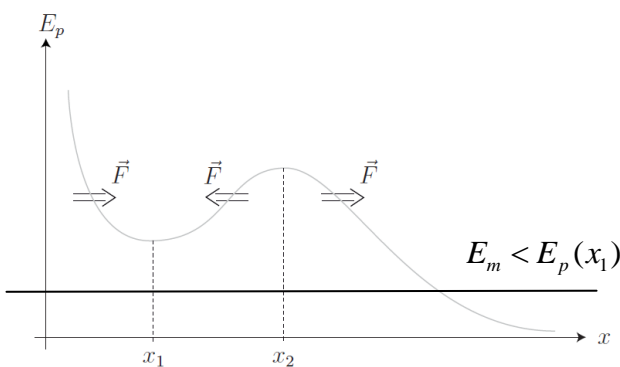


Figure 13 : Problème à énergie mécanique $E_m < E_p(x_1)$ d'un système quelconque

Figure 14 : Problème à énergie mécanique $E_m > E_{p,max}$ d'un système quelconque

(ii) Si $E_p(x_1) \leq E_m \leq E_p(x_2)$, le système mécanique peut être confiné entre x_a et x_b , on a un **état lié**. Dans le cas particulier d'un mouvement à une dimension, cela se traduit par une oscillation entre x_a et x_b .

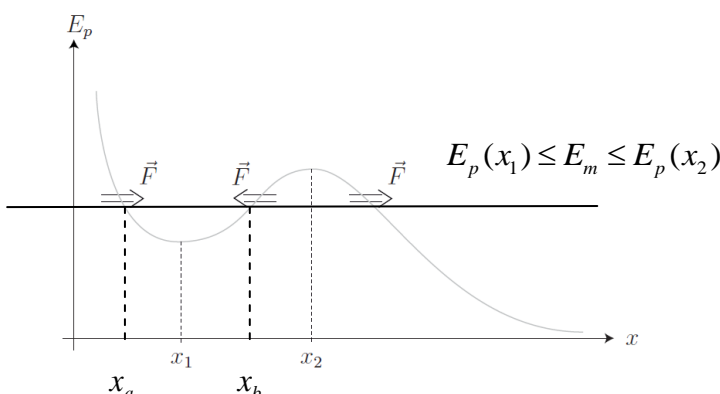


Figure 15 : Problème à énergie mécanique $E_p(x_1) \leq E_m \leq E_p(x_2)$ d'un système quelconque – problème unidimensionnel

2. Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre

a) Exemple : le pendule simple

Pour un système conservatif tel que le pendule, on va voir que la conservation de l'énergie mécanique constitue une intégrale première du mouvement. On doit exprimer toutes les grandeurs énergétiques en fonction de θ , degré de liberté unique pour le mouvement.

$$\text{L'énergie cinétique du système s'écrit : } E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\text{L'énergie cinétique du système s'écrit : } E_p = E_{pp} = mgl(1 - \cos \theta)$$

On en déduit l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Cette expression constitue ce que l'on appelle une intégrale première du mouvement pour

$$\text{laquelle : } E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = Cte$$

Equation du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

La conservation de l'énergie mécanique entraîne que : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) \right)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = ml^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + (mgl \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\text{En simplifiant, on obtient que : } ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta = 0 \text{ ou encore : } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Cette équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ peut être résolue par méthode numérique.

Pour de petits mouvements au voisinage de l'équilibre, c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$, on peut faire une approximation : $\sin \theta \approx \theta$.

$$\text{L'équation du mouvement s'écrit alors : } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\text{Eq}).$$

$$\text{On pose } \omega^2 = \frac{g}{l} \text{ soit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

L'analyse dimensionnelle montre que ω est homogène à l'inverse d'un temps il s'agit d'une pulsation exprimée en rad.s^{-1} .

$$\text{La solution de (Eq) est donné par : } \theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

θ_m et φ sont en fait des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales du problème.

Démonstration :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \theta$$

On montre également que l'on peut obtenir une expression équivalente :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Là encore, A et B sont en fait des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales du problème.

La pulsation ω est reliée à la période de l'oscillation T .

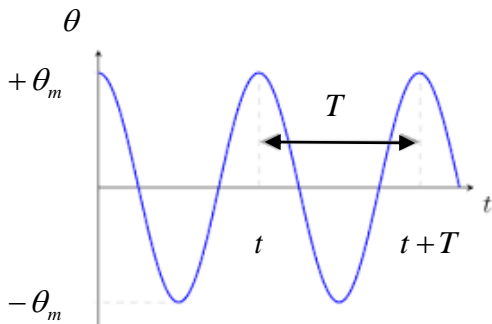


Figure 16 : Oscillation autour de la position d'équilibre du pendule

Dans l'expression $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$, la phase s'exprime par $\varphi(t) = \omega t + \varphi$.

La fonction cosinus est 2π périodique.

Entre les deux maxima consécutifs, la phase a changé de 2π .

$$\varphi(t+T) = \varphi(t)$$

$$\omega(t+T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

La pulsation est reliée à la période par : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La fréquence est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$.

On en déduit la relation entre pulsation et fréquence : $\omega = 2\pi f$

b) Etude générale

Au voisinage d'un point $x = x_0$, mathématiquement on peut développer toute fonction suffisamment régulière à l'aide d'un développement de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \times (x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Exemple : développement de Taylor en $x=0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

L'idée consiste à utiliser un développement de Taylor au voisinage d'une position d'équilibre :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{éq}}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^n E_p}{dx^n}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^n}{n!}$$

Pour des raisons de simplicité on doit se limiter au premier ordre non nul.

Vu que pour une position d'équilibre $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$, on doit aller à l'ordre suivant c'est-à-dire l'ordre 2 :

$$E_p(x) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}})(x - x_{\text{éq}}) + \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2}$$

$$\text{En posant } k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}), \text{ on voit que : } E_p(x) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2}$$

Ceci traduit le fait que au voisinage d'une position d'équilibre, le potentiel a localement une forme parabolique.

L'énergie cinétique étant donnée par : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, on obtient une expression approchée

$$\text{de l'énergie mécanique : } E_m = E_c + E_p(x) \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2}.$$

Dans la mesure où le système est conservatif, l'énergie mécanique est une constante : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

On obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} (x - x_{\text{éq}}) = 0$$

En simplifiant par \dot{x} , on obtient une équation possédant une solution analytique qui permet de modéliser les mouvement au voisinage de la position d'équilibre : $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{\text{éq}}) = 0$.

On peut s'intéresser à la variation de position relativement à la position d'équilibre en effectuant le changement de fonction : $X = x - x_{\text{éq}}$. On obtient : $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$

1^{er} cas : équilibre stable $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0$

Il paraît alors naturel de poser $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et d'introduire la pulsation propre caractéristique ω du système.

On doit résoudre $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$.

La solution correspond à une oscillation sinusoïdale de pulsation ω soit $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou encore $x(t) = X(t) + x_{\text{éq}} = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Le système oscille autour de la position d'équilibre stable :

$$x(t) = X(t) + x_{\text{éq}} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + x_{\text{éq}}$$

2nd cas : équilibre instable $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) < 0$

Il paraît alors naturel de poser $\beta^2 = -\frac{k}{m}$. β est homogène à une pulsation, c'est une pulsation caractéristique du système.

On doit résoudre $\ddot{X} - \beta^2 X = 0$.

La solution correspond est un mouvement divergent : $X(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$.

Le système s'éloigne de la position d'équilibre qui est donc instable.

On peut aussi l'exprimer avec les fonctions de la trigonométrie hyperbolique :

$$X(t) = A' \cosh(\beta t) + A'' \sinh(\beta t)$$