Energétique des systèmes mécaniques

1. Grandeurs cinétiques

Quantité de mouvement d'un point matériel (masse m) animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R :
$\vec{p} = m\vec{v}$

Pour un point matériel de masse *m* se déplaçant avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel *R*, nous poserons que l'énergie cinétique de ce point est : $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$.

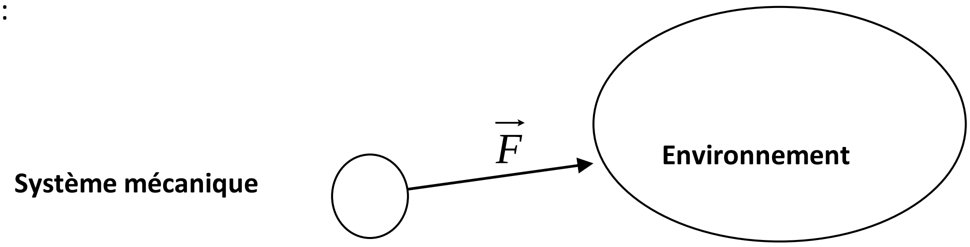
Une énergie s'exprime en Joules (J).

2. Modélisation des interactions par des forces

La modélisation des interactions mécaniques est assuré par des vecteurs forces notés $\vec{F}$.

Un vecteur force est caractérisé par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme notée $\left\|\vec{F}\right\|$
- Un point d'application



3. Puissance d'une force

La puissance d'une force est définie par $P = \vec{F}.\vec{v}$

La puissance est une quantité d'énergie cédée ou reçue par unité de temps.

Elle s'exprime donc en $J.s^{-1}$ ou Watt (symbole W).

4. Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, on admet que : $\frac{dE_C}{dt} = P = \vec{F}.\vec{v}$

5. Energie potentielle d'une force conservative

Une force est conservative (on dit aussi qu'elle dérive d'une énergie potentielle) s'il existe une fonction $E_p(M) = E_p(x, y, z)$ appelée énergie potentielle telle que la puissance de cette force peut s'écrire :
$P_C = -\frac{dE_p}{dt}$.

Quelques exemples :

L'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(M)$ associée au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un point matériel M, s'écrit $E_{pp}(M) = E_{pp}(z) = mgz + Cte$.

L'énergie potentielle élastique de déformation d'un ressort est donné par :

$$E_{pél} = \frac{1}{2}k\,x^2 + Cte = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 + Cte$$

k est la constante de raideur exprimée en N.m^{-1} et $x = l - l_0$ est l'élongation ou déformation

6. Energie mécanique

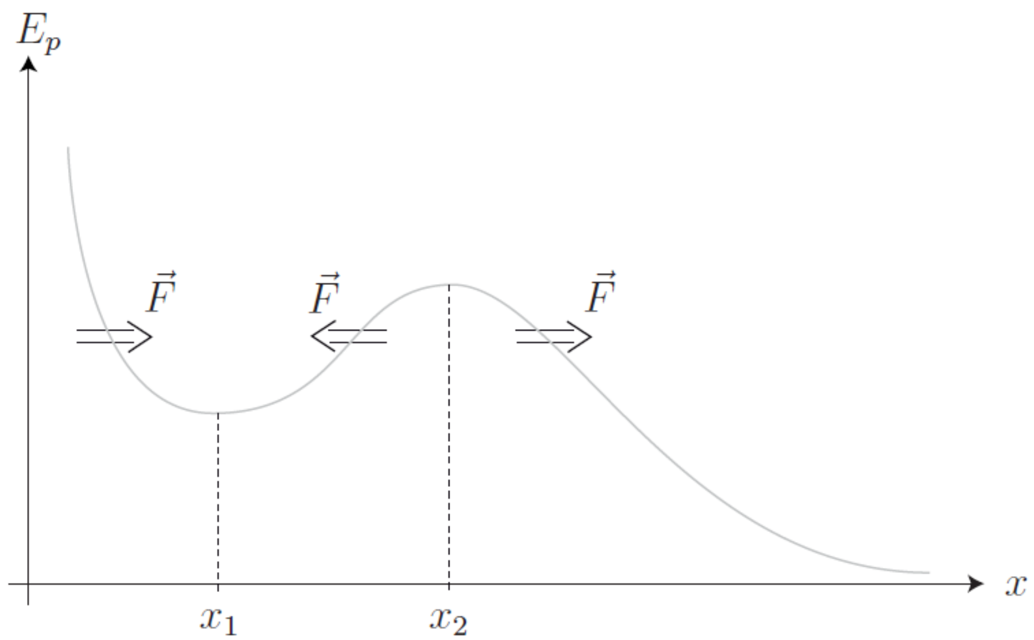
On définit l'énergie mécanique comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E_m = E_c + E_p$. (unité J)

7. Théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'´energie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives : $\frac{dE_m}{dt} = P_{NC}$

8. Etat d'équilibre mécanique

Une position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle pour laquelle : $\frac{dE_p}{dx} = 0$.



Un minimum d'énergie potentielle, pour lequel on a simultanément $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$, correspond à une position d'équilibre stable. Lorsque le système s'écarte d'une position d'équilibre stable la force résultante ramène toujours le système vers sa position d'équilibre initiale.

Sur la courbe $E_p(x)$, $x = x_1$ est une position d'équilibre stable.

Un maximum d'énergie potentielle, pour lequel on a simultanément $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$, correspond à une position d'équilibre instable. Lorsque le système s'écarte d'une position d'équilibre instable, la force résultante écarte toujours le système de sa position initiale.

Sur la courbe $E_p(x)$, $x = x_2$ est une position d'équilibre instable.

Pour de faibles amplitude de mouvement, le système oscille de façon sinusoïdale autour de la position d'équilibre stable $x_{éq}$: $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + x_{éq}$