

Oscillations libres

I. Oscillations libres dans quelques situations expérimentales

1. Oscillateur mécanique horizontal

Disposons sur un rail à coussin d'air un chariot pouvant glisser pratiquement sans frottement. Il est attaché à l'une des extrémités d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est fixe. Les spires du ressort sont non-jointives, de sorte que le ressort peut également être comprimé.

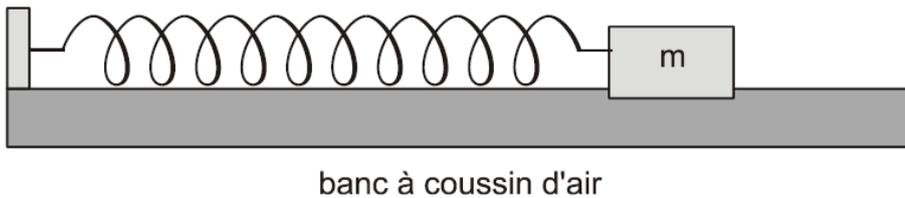


Figure 1 : oscillateur à ressort horizontal

Observations

Ecartons légèrement le chariot de sa position d'équilibre et lâchons-le sans vitesse initiale. Le solide effectue des oscillations libres autour de sa position d'équilibre. Ces oscillations sont légèrement amorties à cause de la résistance de l'air freinant le chariot.

2. Pendule

Un pendule pesant est un objet en oscillation dans un plan vertical sous l'effet de la pesanteur. Il est modélisé par un pendule simple qui est constitué d'un objet ponctuel G de masse m accroché à un fil sans masse (de masse négligeable devant m) et de longueur l très supérieure aux dimensions du solide.

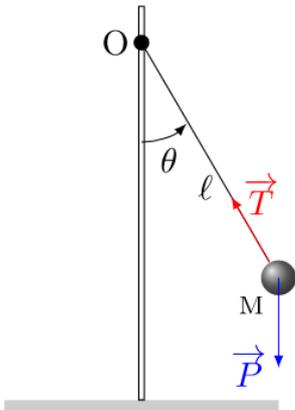


Figure 2 : Pendule pesant simple

À l'équilibre, le fil est vertical. La position de G en mouvement est repérée par l'angle θ entre le fil et sa position d'équilibre (écart ou abscisse angulaire). Le pendule mécanique effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre verticale. Le mouvement est périodique. Il s'agit d'un oscillateur mécanique.

3. Conclusion sur les oscillateurs libres

Oscillateur mécanique

Un système mécanique qui effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre est dit oscillateur mécanique. Une **oscillation** est un aller-retour autour de la position d'équilibre (ex. ressort, pendule, etc..)

La durée correspondant à une oscillation libre est appelée période propre du système mécanique (notée T_0).

Elle est reliée à la fréquence propre et à la pulsation propre du mouvement par les relations :

- Fréquence propre : $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Pulsation propre : $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T_0}$

Exemples : mouvement des marées, battements du coeur, ...

Oscillateur libre

C'est un oscillateur abandonné à lui-même après excitation extérieure.

Exemples : pendule simple, pendule élastique, ...

Oscillateur harmonique

C'est un oscillateur dont l'évolution dans le temps suit une loi sinusoïdale du temps.

Exemples : pendule élastique sans frottement (cas idéalisé) ou avec frottement très faible dans le cadre du TP 2.

II. Oscillations libres au voisinage d'une position d'équilibre

1. Définition

On appelle oscillateur harmonique tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps (en l'absence d'amortissement et d'excitation) est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation est donnée :

La solution de cette équation est donné par : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

x_m et φ sont en fait des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales du problème.

Démonstration :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$$

On voit alors que $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

2. Mouvement d'un oscillateur mécanique à ressort horizontal

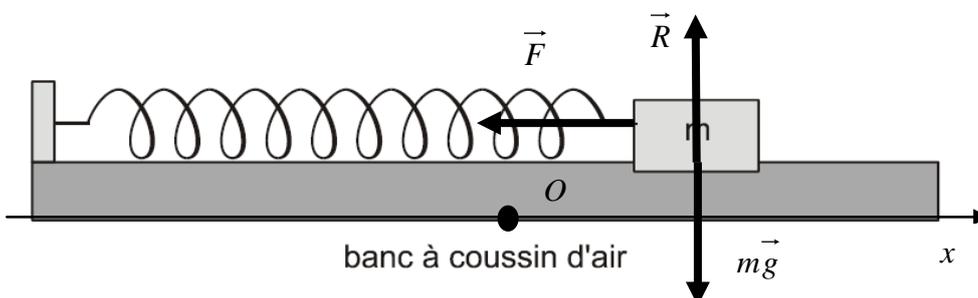


Figure 3 : oscillateur à ressort horizontal - Bilan des forces

Bilan des interactions :

On néglige les forces de frottements $P_f = 0$.

Le poids $m\vec{g}$ et \vec{R} la réaction du support sont orthogonaux au mouvement. La puissance développée par ces actions mécaniques est donc nulle vu que : $P(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$ et $P(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = 0$

La seule force à considérer est la force de rappel du ressort \vec{F} dont l'énergie potentielle élastique est donnée par : $E_{p\acute{e}l} = \frac{1}{2}k x^2$ en prenant la constante nulle avec la référence $E_{p\acute{e}l}(x=0) = Cte = 0$.

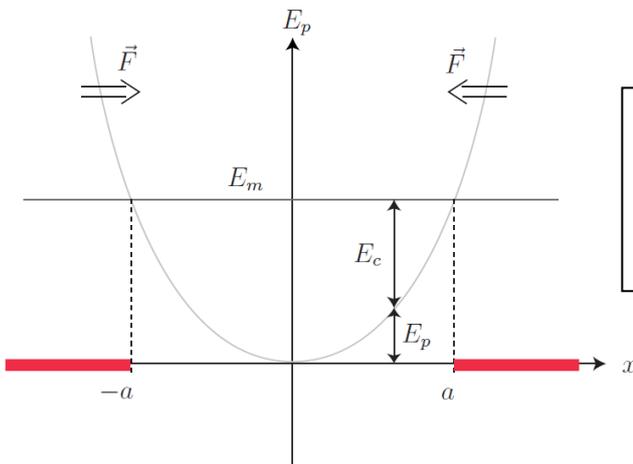


Figure 4 : Energie potentielle élastique d'un ressort

On désigne par la grandeur algébrique $x = l - l_0$ la déformation du ressort.

L'énergie potentielle est minimale en $x = 0$.

Le système est conservatif, l'énergie mécanique est par conséquent conservée.

On peut donc écrire que : $E_m = E_c + E_{p\acute{e}l} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k x^2 = Cte$

On voit par ailleurs que $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$.

On en déduit que $E_{p\acute{e}l} = E_m - E_c \leq E_m$ car l'énergie cinétique est positive.

On voit sur la courbe de la figure 8 que la valeur maximale accessible pour l'énergie potentielle est E_m .

Le mouvement doit respecter cette condition à tout instant : on voit que cela est possible sur la courbe si et seulement si $-a \leq x \leq +a$. **La trajectoire du système mécanique est donc bornée.**

On remarque en outre que l'énergie potentielle est minimale en $x = 0$.

On peut calculer la force de rappel du ressort avec : $\vec{F} = -\frac{dE_{p\acute{e}l}}{dx}\vec{u}_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k x^2\right)\vec{u}_x = -k x\vec{u}_x$

On voit que la projection de cette force s'écrit : $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -k x$.

Dès que l'on s'écarte de la position $x = 0$, on voit que :

- Si $x > 0$ alors $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -k x < 0$; la force de rappel ramène le système vers $x = 0$.
- Si $x < 0$ alors $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = -k x > 0$; la force de rappel ramène le système vers $x = 0$.

Conclusion :

La position $x = 0$, correspondant au minimum d'énergie potentielle, est une position d'équilibre stable pour le ressort.

Equation du mouvement :

Le système étant conservatif, l'équation du mouvement s'obtient en dérivant l'énergie mécanique

constante : $E_m = Cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \ddot{x} + k \dot{x} = 0$$

On obtient une équation de la forme : $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$.

Il s'agit bel et bien d'un oscillateur harmonique.

3. Généralisation : mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Au voisinage d'un point $x = x_0$, mathématiquement on peut développer toute fonction suffisamment régulière à l'aide d'un développement de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \times (x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

L'idée consiste à utiliser un développement de Taylor au voisinage d'une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ la fonction énergie potentielle en fonction de la coordonnée du mouvement :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{éq}}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^n E_p}{dx^n}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^n}{n!}$$

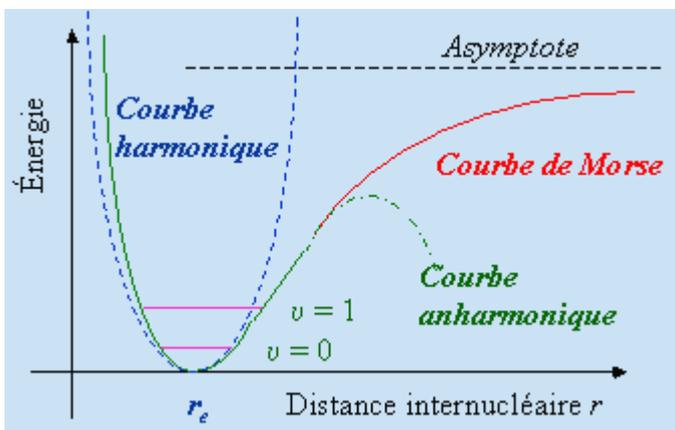


Figure 5 : Exemple de l'énergie potentielle d'une molécule diatomique

On désigne par la grandeur algébrique $x = r$ représente la distance entre les deux noyaux. L'énergie potentielle est minimale en $r = r_e$.

On voit que localement autour de $r = r_e$, on peut remplacer l'énergie potentielle par une parabole caractéristique d'un oscillateur harmonique.

Pour des raisons de simplicité on doit se limiter au premier ordre non nul.

Vu que pour une position d'équilibre $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$, on doit aller à l'ordre suivant c'est-à-dire l'ordre 2 :

$$E_p(x) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}})(x - x_{\text{éq}}) + \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2}$$

En posant $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}})$, on voit que : $E_p(x) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2}$

Ceci traduit le fait qu'au voisinage d'une position d'équilibre, le potentiel a localement une forme parabolique (voir figure 5).

L'énergie cinétique étant donnée par : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, on obtient une expression approchée de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p(x) \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2}$.

Dans la mesure où le système est conservatif, l'énergie mécanique est une constante : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

On obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{k(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_{\text{éq}}) = 0$$

En simplifiant par \dot{x} , on obtient une équation possédant une solution analytique qui permet de modéliser les mouvement au voisinage de la position d'équilibre : $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{\text{éq}}) = 0$.

On peut s'intéresser à la variation de position relativement à la position d'équilibre en effectuant le changement de fonction : $X = x - x_{\text{éq}}$. On obtient : $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$

Cas de l'équilibre stable $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0$

Il parait alors naturel de poser $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et d'introduire la pulsation propre caractéristique ω du système.

On doit résoudre $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$.

La solution correspond à une oscillation sinusoïdale de pulsation ω soit $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou encore $x(t) = X(t) + x_{\text{éq}} = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Le système oscille autour de la position d'équilibre stable :

$$x(t) = X(t) + x_{\text{éq}} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + x_{\text{éq}}$$

4. Solution en fonction des conditions initiales

On obtient que dans tous les cas de figure une équation de la forme : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

On peut alors identifier la pulsation propre du système : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La solution est donnée par : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (S1).

On peut aussi exprimer cette solution d'une manière différente : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ (S2).

En effet, on voit que :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - x_m \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)$$

$$x(t) = x_m \cos(\varphi) \cos(\omega_0 t) - x_m \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)$$

On identifie alors $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} A &= x_m \cos(\varphi) \\ B &= -x_m \sin(\varphi) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_m &= \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan \varphi &= -\frac{B}{A} \quad \text{ou} \quad \varphi = -\text{Arc tan}\left(\frac{B}{A}\right) \end{aligned}$$

En effet, on voit alors que :

$$x_m = x_m \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = \sqrt{x_m^2 \cos^2(\varphi) + x_m^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{x_m \sin(\varphi)}{x_m \cos(\varphi)} = -\frac{B}{A}$$

Exploitation des conditions initiales :

Si on connaît la position initiale $x(t=0) = x_0$ et la vitesse initiale $v(t=0) = v_0$, on peut identifier les deux constantes A et B de l'expression de la solution en $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

On calcule au préalable : $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$

On identifie :

$$\begin{cases} x(t=0) = A = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = B\omega_0 = v_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0 / \omega_0 \end{cases}$$

La solution est donc : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

On peut repasser à l'autre forme de solution $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

en utilisant :

$$\begin{aligned} x_m &= \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan \varphi &= -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{aligned}$$

5. Evolution de l'énergie

On obtient l'évolution temporelle des énergies grâce à $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

L'énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

L'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$

On vérifie que l'énergie mécanique est constante :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = Cte$$

La valeur de l'énergie mécanique est fixée par l'amplitude des oscillations.

L'énergie potentielle et l'énergie cinétique oscillent en quadrature de phase. Quand l'une est maximale, l'autre est minimale.

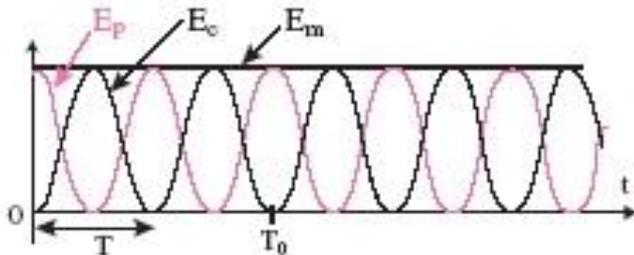


Figure 6 : Evolution temporelle de l'énergie potentielle , cinétique et mécanique

Les transferts d'énergie entre les formes cinétique et potentielle sont périodiques de période $T = T_0/2$, où T_0 est la période propre des oscillations.

Définition rigoureuse :

La valeur moyenne d'un signal (d'une fonction) est alors définie comme une limite sur un intervalle de temps très grand. On adopte alors la définition rigoureuse suivante :

$$\langle f(t) \rangle_t = \overline{f(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt' \right)$$

Cas particulier très important :

Si le signal est périodique le calcul de cette valeur moyenne est identique au bout de chaque

période, il suffit alors de calculer la moyenne sur une période : $\langle f_{\text{Périodique}}(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t') dt'$

On remarque que cette définition ne dépend pas de l'intervalle choisi à partir du moment où la moyenne est calculée sur une période :

$$\langle f_{\text{Périodique}}(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t') dt' = \frac{1}{T} \int_0^T u(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') dt'$$

On calcule une valeur moyenne du carré un signal sinusoïdal : $f(t) = A_{\text{max}} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_{\text{max}}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle f^2(t) \rangle_t = \frac{U_{\text{max}}^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{U_{\text{max}}^2}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)] dt$$

$$\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{A_{\text{max}}^2}{2T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\omega} \right]_{t_0}^{t_0+T}$$

avec $\omega T = 2\pi$

$$\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{A_{\text{max}}^2}{2T} (t_0 + T - t_0) + \frac{A_{\text{max}}^2}{2\omega T} (\sin(2\omega t_0 + 2\omega T + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi))$$

$$\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{A_{\text{max}}^2}{2T} T + \frac{A_{\text{max}}^2}{2\omega T} (\sin(2\omega t_0 + 4\pi + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi))$$

$$\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{A_{\text{max}}^2}{2} + \frac{A_{\text{max}}^2}{2\omega T} (\sin(2\omega t_0 + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi))$$

On en déduit que pour un signal sinusoïdal pur la valeur efficace : $\langle f^2(t) \rangle_t = \frac{A_{\text{max}}^2}{2}$

La démonstration précédente permet d'établir aussi, en prenant $U_{\text{max}} = 1$, que : $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{2}$.

On voit donc qu'il y a en moyenne équirépartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\langle E_c \rangle_t = \left\langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle_t = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{4} m \omega_0^2 x_m^2$$

$$\langle E_p \rangle_t = \left\langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle_t = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{4} m \omega_0^2 x_m^2$$

On obtient que : $\langle E_c \rangle_t = \langle E_p \rangle_t = \frac{E_m}{2}$

III. Oscillations libres au voisinage d'une position d'équilibre : prise en compte de l'amortissement

1. Modèle simple de frottement.

On reprend le problème en introduisant une force de frottement de type fluide.

On choisit une forme : $\vec{F}_f = -f \vec{v} = -f \dot{x} \vec{u}_x$

2. Equation du mouvement.

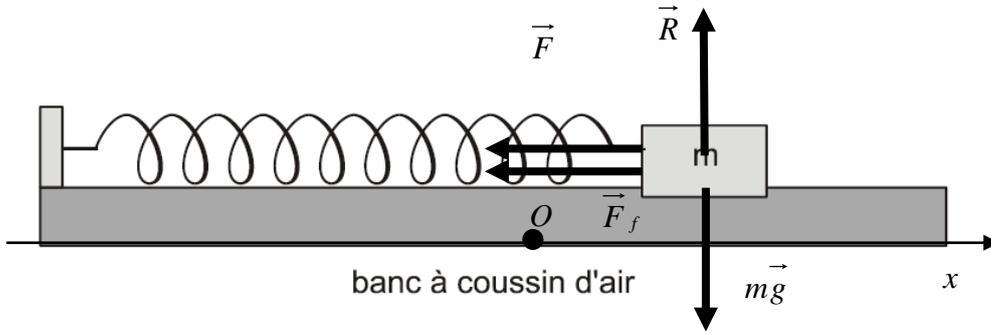


Figure 7 : oscillateur à ressort horizontal avec frottement - Bilan des forces

Bilan des interactions :

Le poids $m\vec{g}$ et \vec{R} la réaction du support sont orthogonaux au mouvement. La puissance développée par ces actions mécaniques est donc nulle vu que : $P(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$ et $P(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = 0$

La seule force supplémentaire à considérer est la force de rappel du ressort \vec{F} dont l'énergie potentielle élastique est donnée par $E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2$.

La force de frottements développe une puissance : $P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -f \vec{v}^2 = -f \dot{x}^2$. Le problème n'est donc pas conservatif.

On utilise le théorème de la puissance mécanique pour mettre en équation le problème :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{NC} = P_f$$

On obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \ddot{x} \dot{x} + k x \dot{x} = -f \dot{x}^2$$

On a donc $m \dot{x} \left(\ddot{x} + \frac{k}{m} x \right) = -\frac{f}{m} \dot{x}^2$ et après simplification :

$$\left(\ddot{x} + \frac{k}{m} x \right) = -\frac{f}{m} \dot{x}$$

L'équation différentielle d'un oscillateur amorti par force de frottement fluide est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{f}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

On pose pour simplifier l'écriture :

- La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Le coefficient d'amortissement : $\lambda = \frac{f}{2m}$

On doit résoudre : $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Remarque :

On définit le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{2f}$

3. Propriété de l'équation

L'équation $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficient constant.

Elle obéit au théorème de superposition des solutions :

Si $x_1(t)$ est solution et vérifie : $\ddot{x}_1 + 2\lambda \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$. De même, si $x_2(t)$ est solution et vérifie :

$\ddot{x}_2 + 2\lambda \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$, alors la combinaison $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ est solution et vérifie l'équation différentielle .

4. Solution à partir de l'équation caractéristique

On cherche à résoudre : $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. [1]

La solution est de la forme : $x(t) = Ae^{rt}$ où r est un nombre complexe.

On dérive une fois $\dot{x}(t) = rAe^{rt}$, puis une seconde fois : $\ddot{x}(t) = r^2 Ae^{rt}$.

On injecte dans l'équation du mouvement [1] :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 Ae^{rt} + 2\lambda rAe^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2)Ae^{rt} = 0$$

On voit alors que r vérifie une équation algébrique appelée équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$.

5. Racines de l'équation caractéristique

Déterminer les solutions revient dès lors à rechercher les racines de l'équation caractéristique.

Pour ce faire, on calcule le discriminant de l'équation algébrique du deuxième degré : $ar^2 + br + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\lambda)^2 - 4\omega_0^2 = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right).$$

On peut aussi utiliser le discriminant réduit : $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$.

Suivant le signe du discriminant, on dispose de plusieurs solutions de natures différentes :

- Discriminant (réduit) positif : $\Delta > 0$ ou $\Delta' > 0$; il existe deux racines réelles négatives
- Discriminant (réduit) nul : $\Delta = 0$ ou $\Delta' = 0$ il existe une racine double
- Discriminant (réduit) négatif : $\Delta < 0$ ou $\Delta' < 0$ il existe deux racines complexes

6. Les différents régimes de variations d'un oscillateur harmonique amorti

a) Régime apériodique

On a $\Delta' > 0$. Sachant que $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$, cela signifie que le régime apériodique

correspond à $\lambda > \omega_0$ ou encore $Q < \frac{1}{2}$.

La solution de l'équation caractéristique s'exprime avec $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $a = 1$ et $b = 2\lambda$

On obtient :

$$r_1 = \frac{-2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = \frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution est donc de la forme : $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales

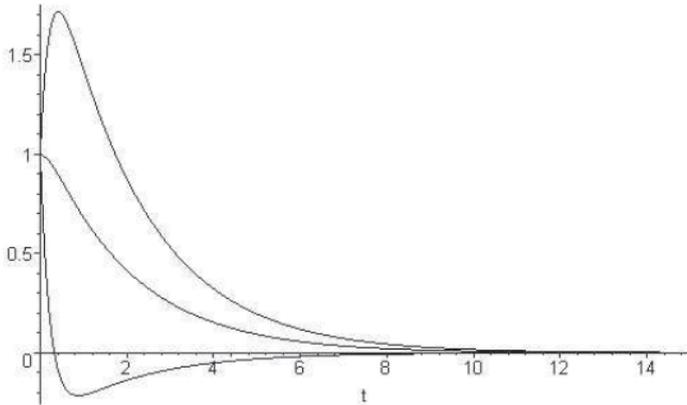


Figure 8 : Représentation graphique des solutions correspondant au régime apériodique

Pour $t \rightarrow +\infty$, on remarque que la solution $x(t) \rightarrow 0$ sans oscillations.

Suivant les valeurs de Q , $x(t)$ présente ou non un extremum selon les conditions initiales portant sur $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$.

b) Régime critique

On a $\Delta' = 0$. Sachant que $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$, cela signifie que le régime apériodique

correspond à $\lambda = \omega_0$ ou encore un facteur de qualité faible $Q = \frac{1}{2}$.

La solution de l'équation caractéristique est double avec $r = \frac{-b}{2a}$ avec $a = 1$ et $b = 2\lambda$

On obtient :

$$r = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda = -\omega_0$$

La solution est donc de la forme : $x(t) = (At + B)e^{rt} = (At + B)e^{-\lambda t} = (At + B)e^{-\omega_0 t}$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales

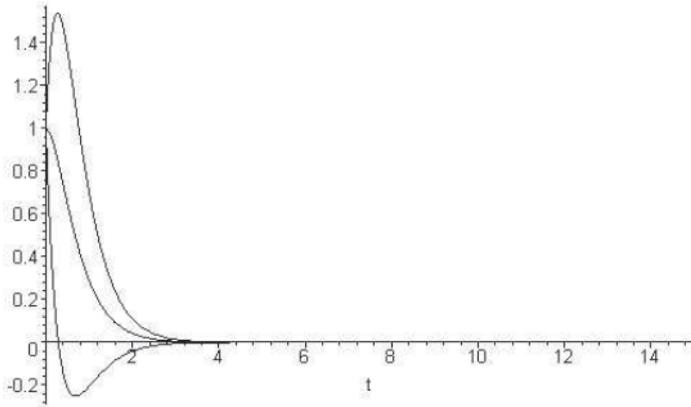


Figure 9 : Représentation graphique des solutions correspondant au régime critique

Pour $t \rightarrow +\infty$, on remarque que la solution $x(t) \rightarrow 0$ sans oscillations.

Suivant les valeurs de Q , $x(t)$ présente ou non un extremum selon les conditions initiales portant sur $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$. Les courbes représentative de $x(t)$ présente une atténuation importante sur un temps très court.

Le régime critique correspond en fait au régime apériodique de plus courte durée

c) Régime pseudo périodique

On a $\Delta' < 0$. Sachant que $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$, cela signifie que le régime apériodique

correspond à $\lambda < \omega_0$ ou encore un facteur de qualité important $Q > \frac{1}{2}$.

La solution de l'équation caractéristique s'exprime avec $r = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ avec $a = 1$ et $b = 2\lambda$

On obtient :

$$r_1 = \frac{-2\lambda - i\sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\lambda - i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = \frac{-2\lambda + i\sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\lambda + i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

On peut définir la pseudo pulsation : $\Omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, ce qui permet de ré exprimer les racines :

$$r_1 = -\lambda - i\Omega$$

$$r_2 = -\lambda + i\Omega$$

La solution est donc de la forme : $x(t) = A'e^{r_1 t} + B'e^{r_2 t} = A'e^{-(\lambda+i\Omega)t} + B'e^{-(\lambda-i\Omega)t} = e^{-\lambda t} (A'e^{+i\Omega t} + B'e^{-i\Omega t})$

On peut décomposer les exponentielles complexes : $e^{\pm i\Omega t} = \cos(\Omega t) \pm i \sin(\Omega t)$

$$x(t) = e^{-\lambda t} ((A'+B')\cos(\Omega t) + i(A'-B')\sin(\Omega t))$$

Finalement, on peut mettre la solution sous la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales

On peut ré exprimer cette solution en :

$$x(t) = e^{-\lambda t} ((A'+B')\cos(\Omega t) + i(A'-B')\sin(\Omega t)) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

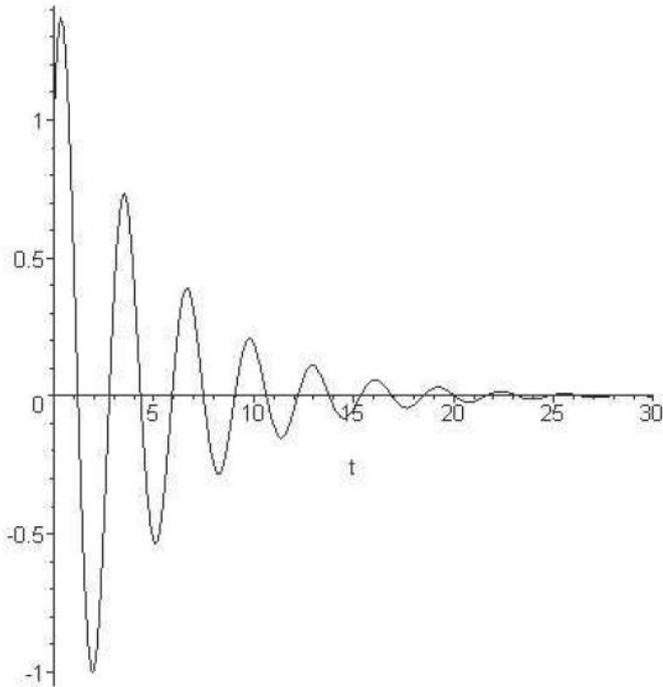


Figure 9 : Représentation graphique des solutions correspondant au régime pseudo périodique

Pour $t \rightarrow +\infty$, on remarque que la solution $x(t) \rightarrow 0$ avec oscillations. On parle de régime pseudo périodique. $x(t)$ présente selon les conditions initiales portant sur $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$ des oscillations qui tendent à s'amortir au cours du temps.

On définit la pseudo période à partir de la pseudo pulsation : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}$.

Décrément logarithmique :

On voit que :

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))}{e^{-\lambda(t+T)} (A \cos(\Omega(t+T)) + B \sin(\Omega(t+T)))} = \frac{e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))}{e^{-\lambda(t+T)} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T)}} = e^{\lambda T}$$

Vu que : $\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\lambda T}$, on peut écrire que le décrément logarithmique est relié simplement au

facteur d'amortissement des oscillations et à la pseudo période par :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \lambda T$$

IV. Portrait de phase

1. Définition

Le portrait de phase est la courbe paramétrique pour laquelle on représente x en abscisse et $v = \dot{x}$ en ordonnée.

On utilise parfois un système de grandeur adimensionnée.

Si x_0 désigne une amplitude spatiale du mouvement caractéristique et v_0 une amplitude caractéristique en vitesse, on peut tracer la courbe paramétrée en abscisse x/x_0 et en ordonnées v/v_0 .

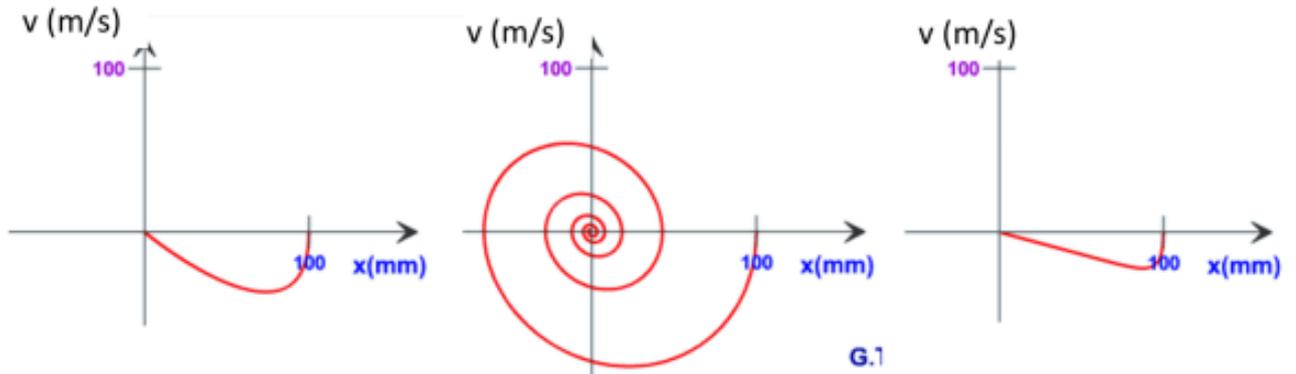


Figure 10 : Exemples de portraits de phase

2. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti

Pour un oscillateur harmonique non amorti, c'est-à-dire sans dissipation le portrait de phase est un cercle.

En effet, sans dissipation le système est conservatif. L'énergie mécanique est exactement celle d'un système masse ressort et s'exprime par : $E_m = E_C + E_{p\grave{e}l}(z) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Cte$

(N.B. On choisit la constante de l'énergie potentielle égale à $Cte = 0$).

On pose $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et donc $E_m = \frac{1}{2}m(v^2 + \omega^2 x^2) = Cte$

Le mouvement oscillant suit une loi horaire du type (cf. cours précédent) au voisinage de la position d'équilibre du système :

$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ soit $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$ en posant $\omega x_0 = v_0$.

On voit que :

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \left(\frac{v^2}{\omega^2 x_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} \right) = Cte \text{ soit } E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \left(\frac{v^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} \right) = Cte$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{v^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{2E_m}{m\omega^2 x_0^2}$$

Si on pose $R^2 = \frac{2E_m}{m\omega^2 x_0^2}$, $X = \frac{x}{x_0}$ et $Y = \frac{v}{v_0}$, on voit que : $X^2 + Y^2 = R^2$

C'est l'équation d'un cercle, le portrait de phase d'un oscillateur harmonique adimensionné est un cercle.

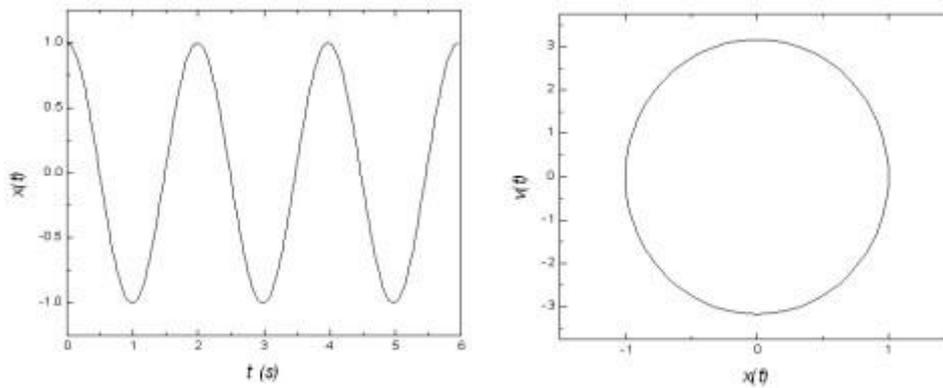


Figure 11 : Portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti

3. Cas du pendule simple

On peut reprendre l'étude à partir de l'énergie mécanique d'un pendule simple. On a montré que l'intégrale première du mouvement sur l'énergie s'écrit:

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = Cte$$

On en déduit que :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E_m}{ml^2} - \frac{2g}{l}(1 - \cos \theta) \quad \text{ou encore} \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2E_m}{ml^2} - \frac{2g}{l}(1 - \cos \theta)}$$

A l'aide de ce résultat, on peut tracer le portrait de phase du pendule simple ci-dessous.

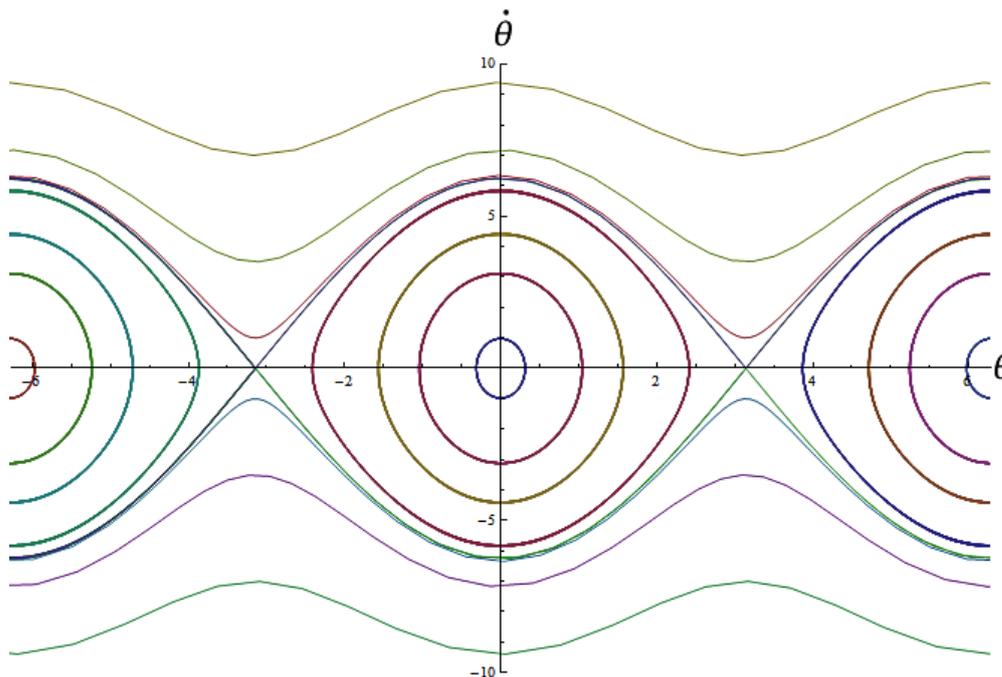


Figure 12 : Portrait de phase d'un pendule simple

On remarquera également grâce à l'animation du pendule simple à fil rigide non amorti que lorsque l'oscillateur n'est plus harmonique, pour des angles importants, le portrait de phase adimensionné est un cycle aplati dans une direction qui n'est dès lors plus un cercle (cf. exercice). Lorsque l'énergie mécanique initiale communiquée au pendule dépasse la valeur limite $2mgl$ alors la trajectoire ne se referme plus. Le pendule effectue plusieurs tours sur lui-même.

4. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti

L'étude graphique permet de caractériser les tendances du portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti. On met en évidence les caractéristiques suivantes :

- Absence de périodicité : trajectoire de phase ouvertes
- Irréversibilité de l'évolution : trajectoires de phase non symétriques
- Relaxation de l'oscillateur vers une position d'équilibre stable : existence d'un point attracteur origine du repère
- Périodicité : présence d'un cycle

Le portrait de phase d'un oscillateur est caractéristique du régime de fonctionnement aperiodique, critique ou pseudo periodique.

Régime aperiodique ($Q = 0,2$) et critique ($Q=0,5$)

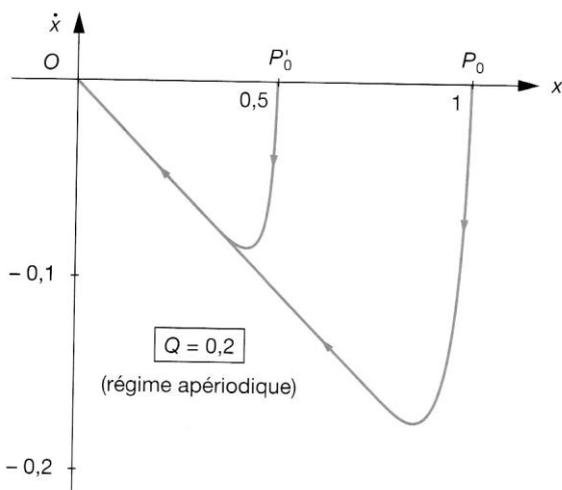


Figure 13 : Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti.
Régime aperiodique : $Q = 0,2$
Régime critique : $Q=0,5$

Régime pseudo periodique ($Q=4$)

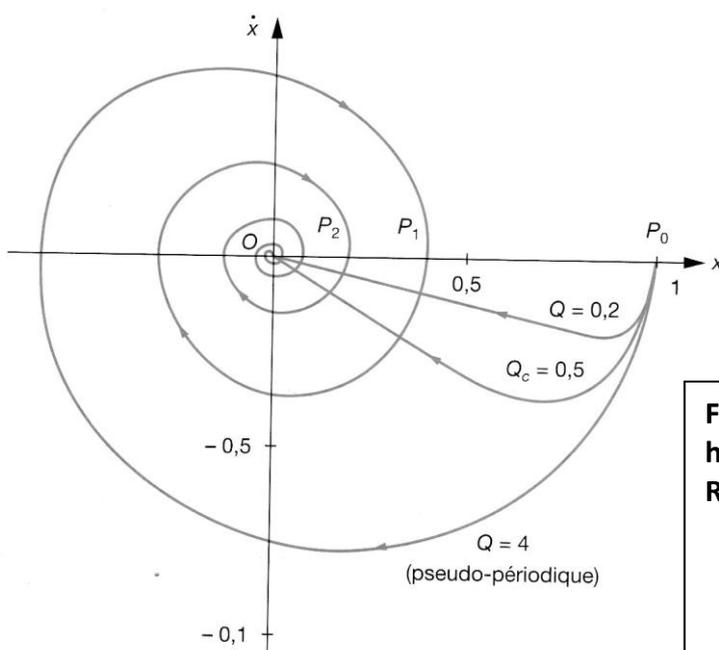


Figure 14 : Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti :
Régime pseudo periodique : $Q = 4$

5. Quelques exemples animés

On trouvera des exemples de portraits de phase à la référence suivante :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/portrait.php