TD 2 : Energétiques des systèmes conservatifs

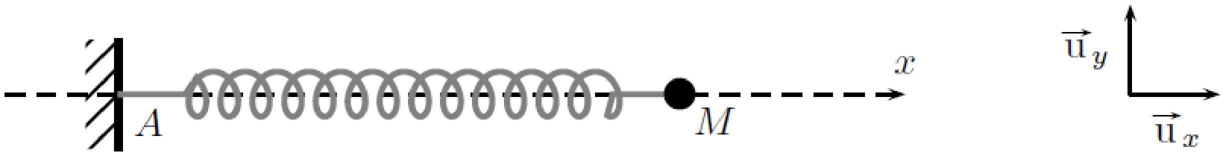
Exercice 1 : Skieur lancé

Un skieur de masse m = 75 kg dont on peut assimiler le mouvement de son centre de masse à celui d'un point materiel de même masse, glisse en ligne droite sur une piste de ski verglacée (piste du kilomètre lancée de Vars dans les Hautes Alpes). La dénivellation est de h=500 m et la pente est de 30%. Parti sans vitesse initiale du point O sommet de la piste, il arrive en bas au point A avec une vitesse maximale.

1. Proposer une modélisation de la situation pour évaluer la vitesse maximale atteinte en A.
2. En réalité les records de vitesse se situent autour de 250 km.h^{-1}. Pourquoi ? Commenter, critiquer votre modèle.

Exercice 2 : mouvement d'un mobile attaché à un ressort horizontal

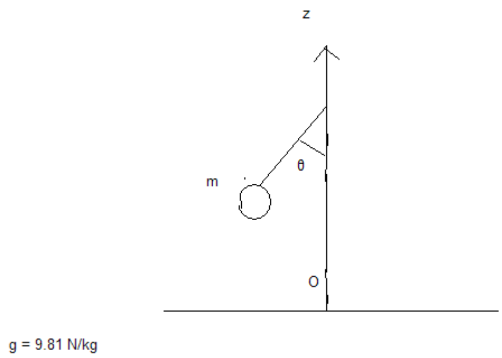
On considère un mobile M de masse m lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure). Il peut se déplacer horizontalement le long d'un axe noté (Ox) sur une glissière parfaite (sans frottement). Le mobile est lancé avec une vitesse initiale v_0 à partir de sa position d'équilibre O supposée être l'origine du repère. L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Exprimer l'énergie cinétique.
2. Exprimer l'énergie potentielle.
3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique. Que peut-on dire au sujet de l'énergie mécanique ?
4. Etablir l'équation différentielle en $x(t)$ à laquelle satisfait le mouvement.
5. Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position du mobile M.

Exercice 3 : Petites oscillations d'un pendule simple

On considère un pendule simple de masse m et de fil inextensible de longueur l dont la position est repérée par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale. On désigne par g = 9,8 m.s^{-2} le champ de pesanteur terrestre.



1. Exprimer l'énergie cinétique du système.
2. Exprimer l'énergie cinétique du système.
3. Exprimer l'énergie mécanique du système.
4. Représenter
5. Que devient l'expression de l'énergie mécanique pour des oscillations de faible amplitude ?
6. En déduire l'intégrale première du mouvement puis l'équation différentielle du mouvement.
7. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?
8. Quelle est la forme de $\theta(t)$?
9. Le pendule est écarté d'un angle initial θ_0 par rapport à la verticale. Il est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$. Représenter sur un graphe l'évolution de $\theta(t)$.

Exercice 4 : Etude énergétique d'un oscillateur

On considère un mobile de masse *m* lié au bâti par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . Le mobile peut se déplacer horizontalement le long d'un axe *Ox* où sa position est repérée par son abscisse x.

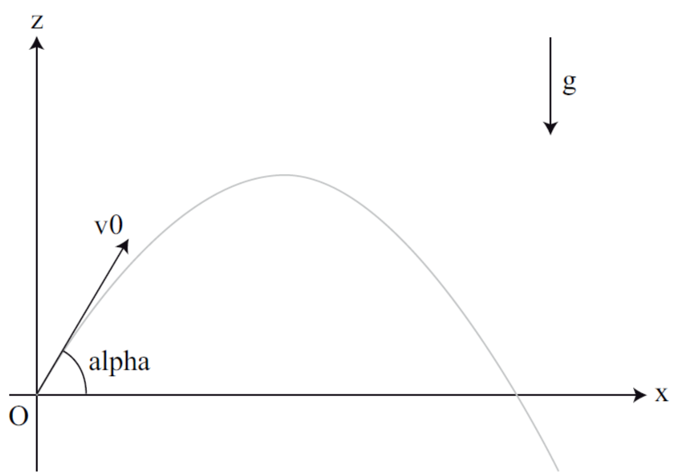
1. Rappeler l'équation différentielle du mouvement en $X = x - l_0$.
   Introduire la pulsation propre ω du système.
2. Vérifier que la solution est $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
3. Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique puis l'énergie mécanique du système. Tracer sur un même graphe l'allure des courbes représentant l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique et l'énergie mécanique .
4. Calculer les moyennes temporelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique. Conclure.

Exercice 5 : mouvement dans un champ de pesanteur

On étudie le mouvement d'un projectile assimilé à un point matériel M de masse m = 100 g dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que ce référentiel est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. L'axe Ox est horizontal et situé au niveau du sol. L'intensité du champ de pesanteur terrestre est donné : g = 9,8 m.s^{-2}.

A. Le point mobile M est initialement situé à l'abscisse $x = 0$ et à l'ordonnée $z = z_0 = h =$ 1,60 m à l'instant $t = 0$ attaché au repère du référentiel d'étude R. Il est lancé verticalement et vers le haut avec une vitesse initiale v_0.

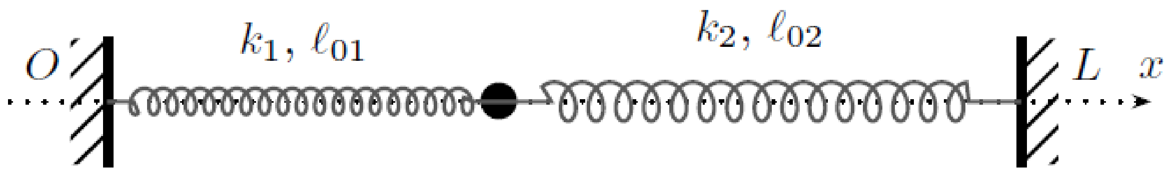
1. Exprimer l'énergie cinétique du projectile.
2. Déterminer la hauteur maximale atteinte.
3. A partir d'une intégrale première du mouvement, déterminer l'accélération du projectile.
4. En déduire l'équation horaire $z(t)$ du mouvement.
5. A quel instant le projectile retombe-t-il sur le sol ?



B. Le point mobile M est initialement situé à l'abscisse $x = 0$ et à l'ordonnée $z = z_0 = h =$ 1,60 m à l'instant $t = 0$ attaché au repère du référentiel d'étude R. A l'instant $t = 0$, désormais, le projectile de masse m est lancé avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α = 30° avec l'axe Ox (voir figure). On démontre que l'accélération du projectile est similaire à celle calculée dans la question **A.3.**

1. Reprendre l'étude. Déterminer l'équation paramétrique du point M $(x(t), y(t), z(t))$ de la trajectoire.
2. Montrer que le mouvement est plan.
3. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire.
4. Quelle est la nouvelle hauteur maximale atteinte par le projectile ?

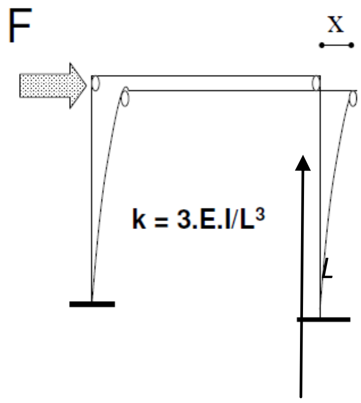
Exercice 6 : mouvement d'un mobile attaché à deux ressorts



On fixe un mobile à deux murs par deux ressorts, respectivement de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} (voir figure). Les points de fixation sont aux abscisses $x = 0$ et $x = L$.

1. Dans quelle mesure peut-on considérer que le système est conservatif ?
2. Exprimer l'énergie potentielle totale du système.
3. En déduire la résultante des forces élastiques subies par le mobile. Montrer que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un unique ressort dont les caractéristiques sont à préciser.
4. Exprimer l'énergie cinétique du système. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
5. Etablir à partir d'une intégrale première du mouvement, établir l'équation différentielle du mouvement.

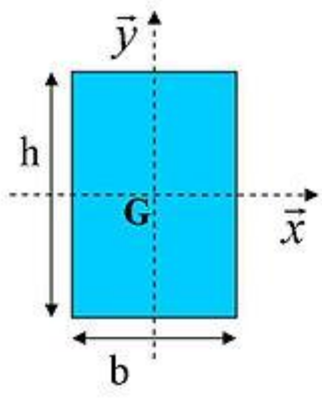
Exercice 7 : flexion d'un bâtiment – mouvement oscillatoire



On s'intéresse à l'équilibre énergétique d'une tour.

L'énergie que le sol communique, par exemple lors d'un séisme à un édifice (E_{sol}) est en partie dissipée par un amortissement (E dis). Mais les constructions restent à la fois en mouvement et déformée sous l'effet des oscillations du sol provoquées par un séisme.

Il reste donc une forme énergie non dissipée : une énergie cinétique (E_{cin}) et une énergie de déformation élastique (E_{pla}) qui correspond à une énergie potentiellement stockée.



Vis à vis des mouvements du sol, les structures se comportent comme des oscillateurs dont les modes propres d'oscillation dépendent notamment de la raideur (ou rigidité) des éléments de la structure. Il convient de donner les paramètres caractérisant la rigidité du bâtiment qui est supposé travailler en flexion. La raideur équivalente en flexion d'un bâtiment est donné par $k = \dfrac{3EI}{L^3}$ où L est la hauteur du bâtiment, E le module d'Young du matériau et I son moment quadratique. Pour une section rectangulaire de la forme indiqué sur la figure ci-contre, $I = \dfrac{bh^3}{12}$.

1. Dans quelle mesure peut-on considérer que le système est conservatif ?
2. Exprimer l'énergie potentielle stockée dans le bâtiment.
3. Exprimer l'énergie cinétique du système. On supposera que l'énergie cinétique peut être évaluée par la vitesse du point extrémal du bâtiment se déplaçant d'une quantité égale à $x(t)$ appelée flèche et en tenant compte d'une masse effective notée m de l'ordre de la masse du bâtiment.
4. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
5. Etablir à partir d'une intégrale première du mouvement, établir l'équation différentielle du mouvement de la flèche.
6. Montrer que le système mécanique peut se mettre à osciller.
7. Calculer la période de l'oscillation.
8. Evaluer numériquement cette période avec les données :

   Données numériques :

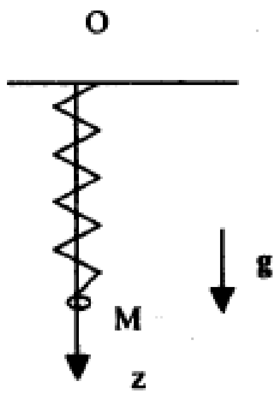
   Section carré du bâtiment de côté : $b = h = 20$ m
   Hauteur : L = 18,6 m
   Masse du bâtiment: m= 10^{11} kg
   Module d'Young : E = 20 GPa (beton)

Exercice 8 : Oscillation d'une molécule diatomique

L'énergie potentielle correspondant à la force qui s'exerce entre les deux atomes d'une molécule diatomique est donnée par : $E_p(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$ où x désigne la distance intermoléculaire. a et b sont deux constantes positives.

1. Donner l'expression de la force $\vec{F}(x) = F(x)\vec{u_x}$ qui s'exerce entre les deux atomes.
2. Les masses des deux atomes sont m et M (M > m) . En supposant que l'atome de masse M reste au repos en un point O , tandis que l'autre peut se déplacer sur la droite x'Ox , trouver les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $E_p(x)$.
3. Quelle est la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux?
4. Montrer que $F(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x = x_0 + \xi) = -K\xi$ où $\xi << x_0$ désigne l'écart par rapport à la position d'équilibre.
5. En déduire la période des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre en fonction de m , a et b.

Exercice 9 : Oscillation verticales d'un ressort



Un point matériel *M* de masse *m* pouvant se mouvoir dans la direction Oz (verticale descendante) est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur *k* et de longueur à vide l_0 . Le champ de pesanteur g est uniforme (figure). On désigne par *z* la cote de *M*.

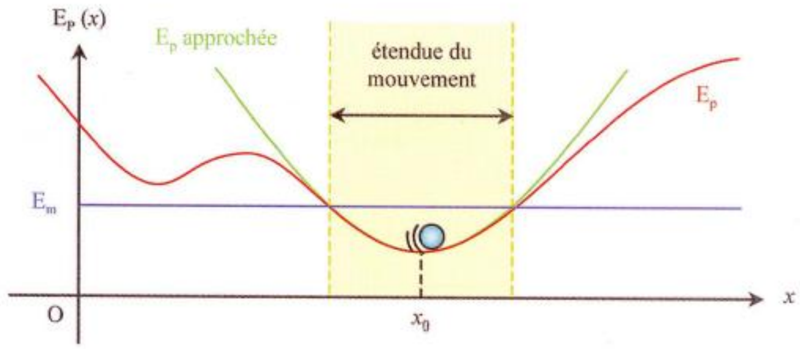
1. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(M)$ du point M en imposant $E_p = 0$ à l'équilibre.
2. En déduire la position d'équilibre z_e.

3. Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $Z = z - z_e$ et k.
4. Exprimer l'énergie cinétique du système.
5. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
6. Etablir l'équation du mouvement.
7. On suppose que le ressort est abandonné sans vitesse initiale depuis la côte $z = l_0 + \frac{mg}{k} + a$

   Déterminer $z(t)$.
8. Dans le cas du mouvement déterminer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Quelle relation existe-t-il entre ces deux grandeurs?
9. Application numérique k = 20 N.m^{-1} , m =100 g , a = 5 cm .
   Calculer la pulsation des oscillations ainsi que l'énergie potentielle moyenne.

Exercice 10 : Modélisation approchées des petites oscillations dans un potentiel

On considère un point matériel M de masse m décrit par un seul degré de liberté noté $x(t)$. On s'intéresse au mouvement de ce point matériel dans un champ de forces conservatives, au proche voisinage de la position d'équilibre stable x_e. On note $E_p(x)$ l'énergie potentielle du point matériel.

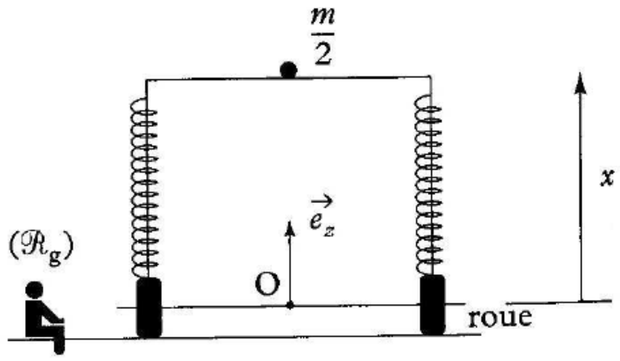


1. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de $E_p(x)$ au voisinage de $x = x_e$.

   Introduire la variable $X = x - x_e$. On posera $K = \frac{d^2E_p}{dx^2}$
2. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x puis en fonction de $X = x - x_e$.
3. En déduire l'équation différentielle du mouvement en $X = x - x_e$.
4. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?

Exercice 10 : essieu avant d'un véhicule

On modélise l'essieu avant d'un véhicule à l'aide de deux ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0. Une masse $m/2$ égale à la moitié de la masse m du véhicule est posée dessus. On s'intéresse au mouvement vertical de l'essieu. On suppose les roues indéformables (de rayon constant).
L'étude est menée dans Rg supposé être un référentiel galiléen.
Données : m = 1 tonne ; k =19000N.m^{-1} ; l_0 = 40cm .



Données :

m = 1 tonne ;

k =19000N.m^{-1} ;

l_0 = 40cm .

1. Montrer que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur et la longueur à vide l_0 .
2. Déterminer la position d'équilibre du système.
3. Le véhicule étant à l'arrêt, on enfonce la masse $m/2$ de 5cm et on la lâche.
   Etablir l'équation différentielle du mouvement, la résoudre.
4. Déterminer l'accélération maximale. Une valeur numérique est attendue.