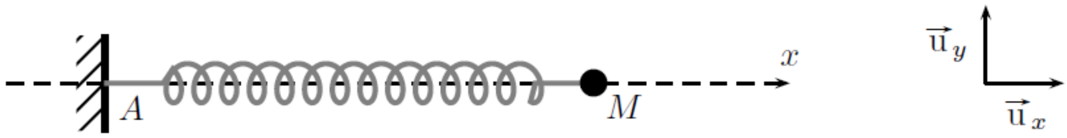
TD 4 : Oscillations libres d'un système mécanique unidmensionnel

Exercice 1 : mouvement d'un mobile attaché à un ressort horizontal – portrait de phase

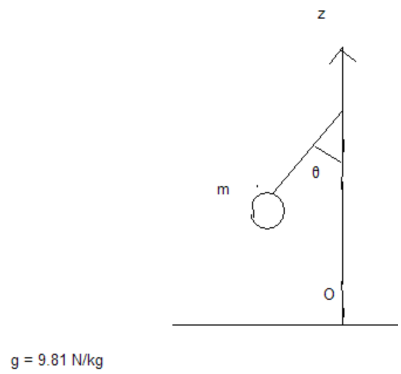
On considère un mobile M de masse m=200 g lié à un ressort de raideur k = 5 N.m^{-1} et de longueur à vide l_0 =15 cm (voir figure). Il peut se déplacer horizontalement le long d'un axe noté (Ox) sur une glissière parfaite (sans frottement). Le mobile est lancé avec une vitesse initiale $v_0 = 0{,}5$ m.s^{-1} à partir de sa position d'équilibre O supposée être l'origine du repère.
L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Faire un bilan des forces.
2. Quelles sont les actions mécaniques à considérer du point de vue énergétique ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
4. En déduire l'expression de l'énergie mécanique. Que peut-on dire au sujet de l'énergie mécanique ?
5. Etablir l'équation différentielle en $x(t)$ à laquelle satisfait le mouvement.
6. Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position du mobile M.
7. A partir d'une intégrale première de l'énergie mécanique exprimer $\dot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$ et des paramètres du problème : k , masse m, vitesse initiale v_0, longueur l.
8. A partir de l'expression de $\dot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$, tracer le portrait de phase du système en vous aidant d'un grapheur ou votre calculatrice graphique.

Exercice 2 : Petites oscillations d'un pendule simple

On considère un pendule simple de masse m et de fil inextensible de longueur l dont la position est repérée par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale. On désigne par g = 9,8 m.s^{-2} le champ de pesanteur terrestre. Les frottements sont négligés.



1. Exprimer l'énergie cinétique du système.
2. Exprimer l'énergie cinétique du système.
3. Exprimer l'énergie mécanique du système.
4. En déduire l'intégrale première du mouvement puis l'équation différentielle du mouvement.
5. Que devient l'expression de l'énergie mécanique pour des oscillations de faible amplitude ?
6. Quelle est la pulsation propre ω_0 des oscillations de faibles amplitudes ?
7. Quelle est la forme de $\theta(t)$ pour des oscillations de faibles amplitudes?
8. Le pendule est écarté d'un angle initial θ_0 faible par rapport à la verticale. Il est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$. Représenter sur un graphe l'évolution de $\theta(t)$.
9. Reprendre les équations du mouvement et la loi horaire $\theta(t)$ de des oscillations de faibles amplitudes sachant que désormais, on lance le pendule à l'instant t=0, avec une la vitesse v_0 faible depuis la position $\theta = 0$.

Exercice 3 : Portrait de phase d'un pendule simple

On reprend le pendule simple de masse m et de fil inextensible de longueur l de l'exercice précédent. La position du pendule est repérée par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale. On désigne par g = 9,8 m.s^{-2} le champ de pesanteur terrestre. Les frottements sont négligés. On communique à l'instant t=0, à ce pendule une énergie mécanique de départ en le lançant à la vitesse v_0 depuis la position $\theta = 0$.

1. Exprimer l'énergie cinétique et potentielle du système.
2. En déduire l'énergie mécanique E_m.
3. A partir d'une intégrale première de l'énergie mécanique exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$ et des paramètres du problème : g , masse m, vitesse initiale v_0, longueur l.
4. Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$ et de g , la masse m, L'énergie mécanique initiale E_0, et sa longueur l.
5. A partir de l'expression de $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$, tracer le portrait de phase du système en vous aidant d'un grapheur ou votre calculatrice graphique. Distinguer en particulier les cas suivants la valeur de l'énergie mécanique.

   On pourra introduire une valeur critique de cette dernière grandeur à parti de laquelle la nature des trajectoires dans le plan de phase change.

Exercice 4 : Etude énergétique d'un oscillateur

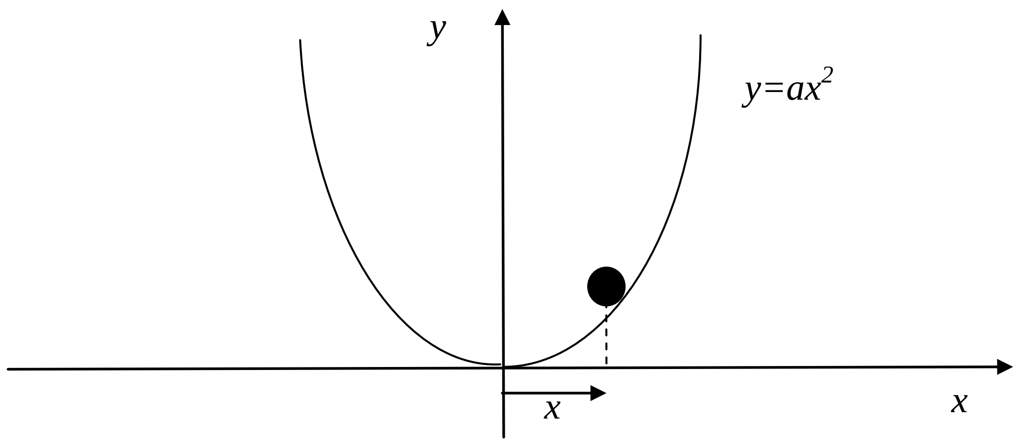
On considère un mobile de masse *m* lié au bâti par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Le mobile peut se déplacer horizontalement le long d'un axe *Ox* où sa position est repérée par son abscisse x.

1. Rappeler l'équation différentielle du mouvement en $X = x - l_0$.
   Introduire la pulsation propre ω du système.
2. Vérifier que la solution est $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
3. Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique puis l'énergie mécanique du système. Tracer sur un même graphe l'allure des courbes représentant l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique et l'énergie mécanique .
4. Calculer les moyennes temporelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique. Conclure.

Exercice 5 : mouvement dans une cuvette parabolique soumise à un champ de pesanteur

On étudie le mouvement d'une bille assimilé à un point matériel M de masse m = 100 g dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que ce référentiel est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$. L'axe Ox est horizontal et situé au niveau du sol. L'intensité du champ de pesanteur terrestre est donné : g = 9,8 m.s^{-2}. La bille est guidée, sans frottement par un support parabolique d'équation $y = ax^2$ (voir schéma ci-dessous).

Le point mobile M est initialement situé sur le guide en x_0 et à l'ordonnée $y(t=0) = y_0 = h =$ 1,60 m à l'instant $t = 0$ attaché au repère du référentiel d'étude R. Il est lancé sans vitesse initiale.



1. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la bille en fonction de $\dot{x}$, x, m, g et a.
2. Déterminer la hauteur maximale atteinte.
3. A partir d'une intégrale première du mouvement, déterminer l'équation du mouvement sous la forme d'une équation différentielle du 2nd degré en $x(t)$ de la bille.
4. Introduire la pulsation caractéristique ou pulsation propre du mouvement ω_0. Quelle est la période propre?
5. En déduire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement. Décrire le mouvement.
6. A quel instant le projectile passe-t-il par une altitude minimale ?

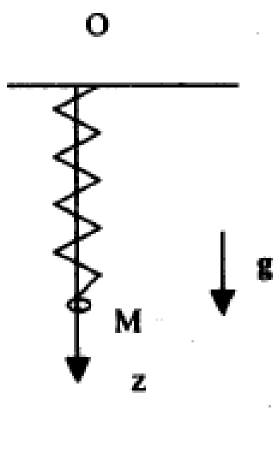
Exercice 6 : Oscillation d'une molécule diatomique

L'énergie potentielle correspondant à la force qui s'exerce entre les deux atomes d'une molécule diatomique est donnée par : $E_p(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$ où x désigne la distance intermoléculaire. a et b sont deux constantes positives.

1. Donner l'expression de la force $\vec{F}(x) = F(x)\vec{u_x}$ qui s'exerce entre les deux atomes.
2. Les masses des deux atomes sont m et M (M > m) . En supposant que l'atome de masse M reste au repos en un point O , tandis que l'autre peut se déplacer sur la droite x'Ox , trouver les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $E_p(x)$.
3. Quelle est la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux?
4. Montrer que $F(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x = x_0 + \xi) = -K\xi$ où $\xi << x_0$ désigne l'écart par rapport à la position d'équilibre.
5. En déduire la période des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre en fonction de m , a et b .

Exercice 7 : Oscillations verticales d'un ressort

Un point matériel *M* de masse *m* pouvant se mouvoir dans la direction Oz (verticale descendante) est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur *k* et de longueur à vide l_o . Le champ de pesanteur g est uniforme (figure). On désigne par *z* la cote de *M*.

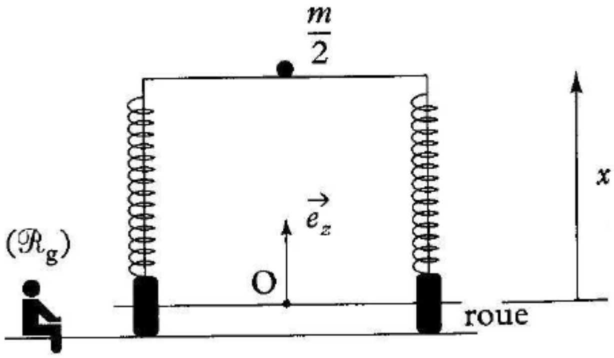


1. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(M)$ du point M en imposant $E_p = 0$ à l'équilibre.
2. En déduire la position d'équilibre z_e.
3. Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $Z = z - z_e$ et k.
4. Exprimer l'énergie cinétique du système.
5. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
6. Etablir l'équation du mouvement.
7. On suppose que le ressort est abandonné sans vitesse initiale depuis la côte $z = l_0 + \frac{mg}{k} + a$

   Déterminer $z(t)$.
8. Dans le cas du mouvement déterminer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Quelle relation existe-t-il entre ces deux grandeurs?
9. Application numérique k = 20 N.m^{-1} , m =100 g , a = 5 cm .
   Calculer la pulsation des oscillations ainsi que l'énergie potentielle moyenne.

Exercice 8 : essieu avant d'un véhicule

On modélise l'essieu avant d'un véhicule à l'aide de deux ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0.
Une masse $m/2$ égale à la moitié de la masse m du véhicule est posée dessus. On s'intéresse au mouvement vertical de l'essieu. On suppose les roues indéformables (de rayon constant).
L'étude est menée dans Rg supposé être un référentiel galiléen.
Données : m = 1 tonne ; k =19000N.m^{-1} ; l_0 = 40cm .



Données :

m = 1 tonne ;

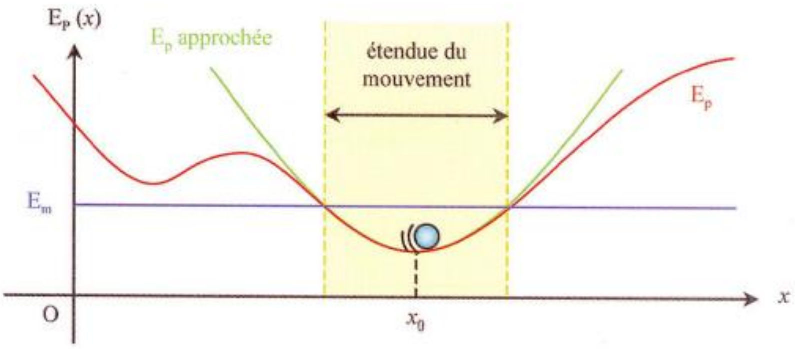
k =19000N.m^{-1} ;

l_0 = 40cm .

1. Montrer que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur et la longueur à vide l_0.
2. Déterminer la position d'équilibre du système.
3. Le véhicule étant à l'arrêt, on enfonce la masse $m/2$ de 5cm et on la lâche.
   Etablir l'équation différentielle du mouvement, la résoudre.
4. Déterminer l'accélération maximale. Une valeur numérique est attendue.

Exercice 8 : Modélisation approchées des petites oscillations dans un potentiel

On considère un point matériel M de masse *m* décrit par un seul degré de liberté noté $x(t)$. On s'intéresse au mouvement de ce point matériel dans un champ de forces conservatives, au proche voisinage de la position d'équilibre stable x_e. On note $E_p(x)$ l'énergie potentielle du point matériel.



1. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de $E_p(x)$ au voisinage de $x = x_e$.

   Introduire la variable $X = x - x_e$. On posera $K = \dfrac{d^2E_p}{dx^2}$
2. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de *x* puis en fonction de $X = x - x_e$.
3. En déduire l'équation différentielle du mouvement en $X = x - x_e$.
4. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?