TD 1 : Observation du mouvement

Exercice 1 : mouvement rectiligne uniforme

On considère un point mobile se déplaçant uniquement le long d'un axe noté Ox. L'accélération de ce point mobile est à tout instant nulle. Le point mobile est initialement situé à l'instant $t = t_0$ sur l'origine O du repère attaché au référentiel d'étude R.
A l'instant $t = t_0$ Il est lancé avec une vitesse v_0.

1. Etablir l'équation horaire de la trajectoire.
2. Si ce point matériel mobile est isolé ou pseudo isolé, que peut-on dire quand à la nature du référentiel R.

Exercice 2 : mouvement rectiligne uniformément accéléré

On considère un point mobile se déplaçant uniquement le long d'un axe noté Ox. L'accélération de ce point mobile est à tout instant constante, dirigées selon Ox et égale à a_0 . Le point mobile est initialement situé à l'abscisse $x = x_0$ à l'instant $t = t_0$ de l'axe Ox repère attaché au référentiel d'étude R. A l'instant $t = t_0$, il est lancé avec une vitesse v_0.

1. Etablir l'équation horaire de la trajectoire.
2. Rechercher une relation univoque entre la vitesse et la position.

Exercice 3 : mouvement uniformément accéléré dans un plan

On étudie le mouvement dans un référentiel muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$
On considère un point mobile se déplaçant dans le plan Oxy. L'accélération de ce point mobile est à tout instant constante, dirigées selon Oy et égale à $\vec{a} = a_0 \overrightarrow{u_y}$. Le point mobile est initialement situé à l'abscisse $x = x_0$ et à l'ordonnée $y = y_0$ à l'instant $t = 0$ attaché au repère du référentiel d'étude R. A l'instant $t = t_0$, il est lancé avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α avec l'axe Ox

1. Schématiser la situation. Porter sur le schéma les orientations du vacteur accélération et vitesse initiale.
2. Etablir l'équation horaire du vecteur vitesse.
3. Etablir l'équation horaire de la trajectoire.
4. Rechercher l'équation cartésienne de la trajectoire.

Exercice 4 : mouvement circulaire uniforme

On considère un point mobile se déplaçant uniquement sur un cercle de rayon R de centre O avec une vitesse angulaire constante égale à ω.

1. Etablir l'équation horaire de la trajectoire dans un référentiel muni d'un système d'axe cartésien Oxy ou $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$ supposé immobile dans le référentiel d'étude R.
2. En déduire les expressions du vecteur vitesse dans ce repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$.
3. Reprendre le calcul dans le système des coordonnées polaires.
   Que vaut l'accélération orthoradiale ? En déduire l'accélération.
4. Rechercher une relation univoque entre la vitesse et la vitesse angulaire
5. Rechercher une relation univoque entre la vitesse et accélération.

Exercice 5 : mouvement circulaire accéléré

Une particule se déplace sur un cercle de rayon R à la vitesse angulaire constante de valeur absolue ω. A la date t = 0, elle commence à ralentir avec une accélération angulaire constante de valeur absolue α.

1. Quelle est la dimension de α ? Quel est son signe relativement à celui de ω ?
2. Faire un schéma de la situation étudiée. Définir le repère approprié pour repérer le mouvement.
3. Donner l'expression mathématique du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
4. Quelle est la durée au bout de laquelle la particule s'arrête ? Quelle distance aura-t-elle alors parcourue durant la phase de décélération ?

Exercice 6 : dérivées des vecteurs de la base cylindrique

1. Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne.
2. Calculer la dérivée de ces vecteurs dans la base cartésienne. Exprimer enfin la dérivée de ces vecteurs dans la base de départ, c'est-à-dire la base cylindrique.

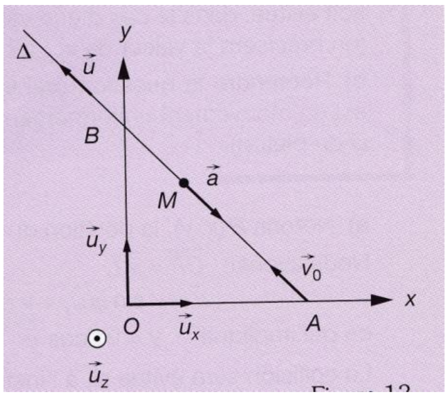
Exercice 7 : mouvement en coordonnées sphériques

1. Quelles coordonnées utilise-t-on pour se repérer sur Terre ? Donner le lien avec les coordonnées sphériques.
2. Schématiser les plan (Oxy) et (Oz,OM) en perspective. Représenter les vecteurs de la base sphérique.
3. Exprimer ces vecteurs dans la base cartésienne $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ de départ.
4. Calculer la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_r}$ dans la base cartésienne puis l'exprimer dans la base sphérique.
5. En déduire l'expression du vecteur vitesse dans la base sphérique.

Exercice 8 : mouvement à accélération radiale

Soit un point M se déplaçant dans la plan plan (Oxy), dont la position est repéré par les coordonnées polaire (r,θ)à l'instant t. On suppose que l'accélération du point M est uniquement radiale et constante. Sachant que à t = 0, on a : $r(t=0)=r_0$ et $\dot{\theta}(t=0)=\omega$ exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de r.

Exercice 9 : mouvement rectiligne particulier



Dans un référentiel $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$, un mobile ponctuel M de déplace sur un axe Δ constitué de la droite AB avec les coordonnées des points $A(D,0,0)$ et $B(0,0,D)$.

On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe Δ. Le mobile part du point A à l'instant t = 0 avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}=v_0\vec{u}$. Ce mobile se déplace avec une accélération constante dirigée vers A soit $\vec{a}=-a\vec{u}$

1. Justifier que le vecteur vitesse du point M puisse être donné par : $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$.
2. Déterminer $\overrightarrow{AM}$ en fonction du temps.
3. Quelle est la condition sur D, v_0 et a pour que le mobile puisse atteindre le point B ?

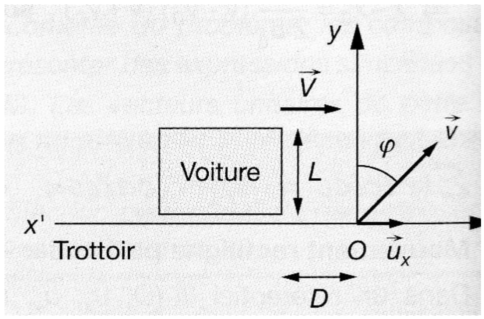
Exercice 10 : mouvement de référentiels

1. Qualifier le mouvement du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique.
2. Qualifier le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel de Copernic.
3. Que dire du mouvement du référentiel terrestre dans le référentiel de Copernic.

Exercice 11 : mouvements rectilignes simultanés

Soit une voiture de largeur L en mouvement le long d'un trottoir rectiligne formé par un axe Ox. Un piétion décide de traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D.

Le mouvement du piéton est rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}$ incliné d'un angle φ



1. La voiture se déplace à une vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u_x}$. Quelle doit être la valeur de φ pour que la collision soit éviter dans la mesure où la vitesse du piéton est suffisante.

2. Reprendre la question précédente dans le cas où la voiture est uniformément accélérée.

Exercice 12 : mouvement hélicoïdal

Dans un référentiel R muni d'un repère cartésien $(O,\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z})$, un point matériel M décrit un mouvement de telle sorte :

- que le mouvement de P, défini comme le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy) soit un mouvement circulaire uniforme.
- Que le mouvement de H, défini comme le projeté orthogonal sur l'axe Oz corresponde à un mouvement de translation uniforme.

1. Exprimer les vecteurs positions, vitesse et accélération associé à ce type de mouvement.
2. En étudiant les propriétés cinématiques, décrire le mouvement de M. Montrer en particulier qu'il est uniforme.

Exercice 13 : Trajectoire conique

Un point matériel M, repéré par ses coordonnées cartésiennes, effectue un mouvement défini par les équations horaires suivantes ($t \geq 0$) :

$x(t) = e^t \sin t$

$y(t) = e^t \cos t$

$z(t) = e^t$

1. En quel point M_0 le point M se trouve-t-il à l'instant t = 0 ? Justifier le fait que le point M s'éloigne à l'infini de sa position initiale.
2. Exprimer la norme v(t) de la vitesse ainsi que la norme a(t) de l'accélération du point M.
3. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM},\vec{u_z})$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 : Escabeau en chute

Un escabeau est posé sur le sol, un des points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'escabeau à l'instant t est repérée par l'angle $\alpha(t)$ formé par la portion OA de l'escabeau avec le mur. L'extrémité B de l'escabeau glisse sur le sol. L'escabeau est tel que OA = AB = L.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point A dans un repère en coordonnées polaires que l'on aura préalablement défini. On exprimera ces composantes en fonction de L, α et des dérivées de α par rapport au temps.
2. Exprimer dans le système de coordonnées cartésiennes les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point B, en fonction de L, α et des dérivées de α par rapport au temps.

Exercice 15 : Trajectoire d'un ballon-sonde

On étudie le mouvement d'un ballon-sonde dans le référentiel lié à la Terre. Le ballon-sonde *M*, lâché au niveau du sol, s'élève avec une vitesse verticale constante de norme v_0. Le vent lui communique une vitesse horizontale de direction et de sens constants et de norme proportionnelle à l'altitude du ballon.

1. Faire un schéma de la situation étudiée. Définir le repère approprié pour repérer le mouvement, et l'orienter convenablement.
2. On cherche à exprimer mathématiquement les hypothèses de l'énoncé. Donner une expression mathématique du vecteur vitesse du ballon-sonde au cours de son mouvement. Pour exprimer la composante horizontale, on introduira une constante τ homogène à un temps.
3. Etablir les deux équations différentielles vérifiées par les coordonnées du point *M*.
4. En déduire les équations horaires de la trajectoire du ballon-sonde.
5. Déterminer l'équation de la courbe suivie par le ballon-sonde dans l'espace au cours de son mouvement. Quelle est la nature de la trajectoire ?
6. Exprimer les composantes du vecteur accélération dans le système de coordonnées retenu pour l'étude.

Exercice 16 : Choisir le bon référentiel

Une rivière a une vitesse d'écoulement supposée uniforme (i.e. identique en tout point) et constante (i.e. indépendante du temps). Un bateau à moteur, qui circule dans le sens du courant, dépasse un radeau en un point A. Le radeau n'est pas motorisé et se déplace avec le courant de la rivière. Une demi-heure après, le bateau fait demi-tour. Il remonte le courant et croise le radeau en un point B situé à 3 km en aval du point A.
Déterminer la vitesse du courant en supposant que la vitesse du bateau *par rapport au courant* est constante.

Exercice 17 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui se situe dans le plan équatorial, qui tourne dans le même sens et avec la même vitesse angulaire que la Terre autour d'elle-même.
Le mouvement d'un satellite géostationnaire est circulaire uniforme. Le centre de l'orbite est le centre de la Terre.

On admet que la norme de l'accélération du satellite est donnée par l'expression : $a = g\left(\frac{r}{R}\right)^2$

où R = 6400 km est le rayon de la Terre, *r* le rayon de l'orbite du satellite et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

1. Montrer que le vecteur accélération est nécessairement radial (i.e. composante orthoradiale est nulle)
2. Quelle est le signe de la composante radiale de l'accélération ? Quelle est la relation entre la norme de l'accélération et sa composante radiale ?
3. Calculer la période de rotation de la Terre sur elle-même, puis la vitesse angulaire de rotation.
4. Déterminer alors l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Exercice 18 : Rotation autour d'un axe

Un point matériel suspendu au bout d'un fil est en rotation autour de l'axe vertical, avec une vitesse angulaire constante. L'angle α que forme le fil avec la verticale est constant au cours du mouvement.

1. Schématiser la situation.
2. Déterminer la vitesse et l'accélération du point matériel

Exercice 19 : Roue de vélo

On considère la roue avant d'un vélo, de centre G et de rayon *a*, qui se déplace sur un sol horizontal à la vitesse constante v_0 par rapport au sol. On étudie le mouvement d'un point M du pneu lié à la roue. Le référentiel d'étude est le référentiel lié au sol.

1. Faire un schéma de la situation étudiée. Représenter les trois repères suivants :

- un repère cartésien R_1 lié au référentiel d'étude
-un repère cartésien R_2 d'origine G et dont les axes sont orientés comme ceux de R_1
- un repère cylindrique d'origine G

2. Déterminer l'équation horaire de la trajectoire dans le référentiel lié au sol d'un point du pneu initialement en contact avec le sol.
3. Déterminer l'expression de la vitesse du point M par rapport au sol en fonction de v_0, a et $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse de rotation angulaire de la roue
4. On suppose que la roue effectue un mouvement de roulement sans glissement (la roue ne « dérape » pas). Etablir la relation entre v_0 et $\omega = \dot{\theta}$ dans ce cas.
5. Dans le cas d'un roulement sans glissement, tracer l'allure de la trajectoire du point M dans le référentiel d'étude.

Exercice 20 : recherche du trajet le plus rapide

Un homme est sur la plage en un point A et se propose d'atteindre le plus rapidement possible un point B immobile situé dans l'eau, AB n'étant pas perpendiculaire au bord de la mer. Sachant que l'homme décrit une trajectoire rectiligne sur la plage de vitesse v_1 et une trajectoire rectiligne de vitesse v_2 dans l'eau. Ces trajectoires font des angles i_1 et i_2 avec la normale au bord de la mer. Déterminer la relation entre i_1, i_2, v_1 et v_2 pour que la durée du trajet soit minimale. On utilisera un système de coordonnées cartésiennes. Comparer à un autre domaine de la physique.

Exercice 20 : Mission Rosetta

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil. La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure. On donne :

- masse de la comète : $\mathrm{m_{com}} = 1{,}0.10^{13}\ \mathrm{kg}$
- masse volumique de la comète : $\mu_{\mathrm{com}} = 400\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- période de rotation propre de la comète : $\mathrm{T_{com}} = 12{,}4\ \mathrm{h}$
- constante gravitationnelle : $\mathrm{G} = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
- distance de largage par rapport au centre : $\mathrm{r_{larg}} = 22{,}5\ \mathrm{km}$
- masse de la sonde Rosetta : $\mathrm{m_{ros}} = 1500\ \mathrm{kg}$
- masse de l'atterrisseur Philae : $\mathrm{m_{ph}} = 98\ \mathrm{kg}$

Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse $\mathrm{m_{com}}$ et de masse volumique μ_{com}. La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée $\mathrm{r} = \mathrm{OM}$.

1. Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète. On supposera que la répartition de matière est homogène.

2. Approche numérique de l'équation du mouvement
On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur $\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}$ pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{\mathrm{a}} = \ddot{\mathrm{r}}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}$). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen. Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale $\mathrm{r(t = 0) = r_{larg}}$, pour différentes vitesses verticales initiales $\mathrm{v_0} = \dot{\mathrm{r}}(\mathrm{t} = 0)$.
3. Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.
4. La durée réelle de la chute est $\tau \simeq 7\ h$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.
5. Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale. Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

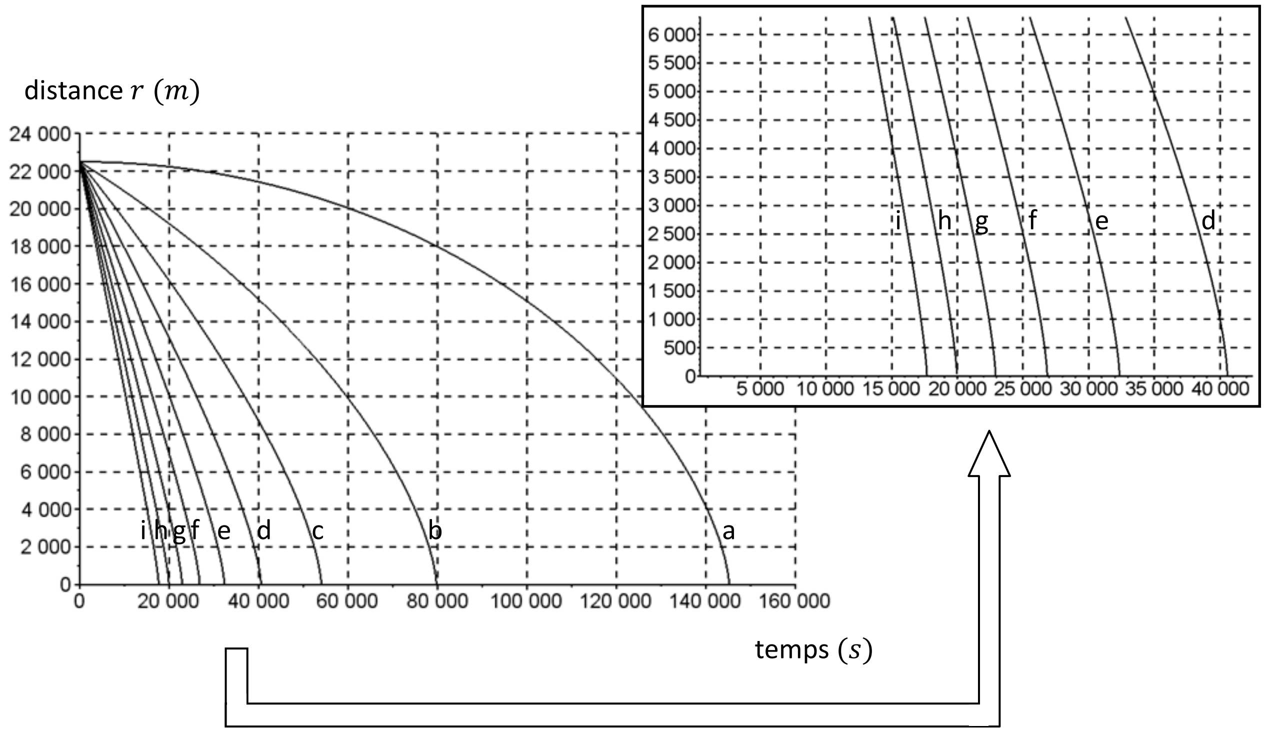


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :

a : $v_0 = 0\ m \cdot s^{-1}$ b : $v_0 = -0{,}15\ m \cdot s^{-1}$ c : $v_0 = -0{,}30\ m \cdot s^{-1}$

d : $v_0 = -0{,}45\ m \cdot s^{-1}$ e : $v_0 = -0{,}60\ m \cdot s^{-1}$ f : $v_0 = -0{,}75\ m \cdot s^{-1}$

g : $v_0 = -0{,}90\ m \cdot s^{-1}$ h : $v_0 = -1{,}05\ m \cdot s^{-1}$ i : $v_0 = -1{,}20\ m \cdot s^{-1}$

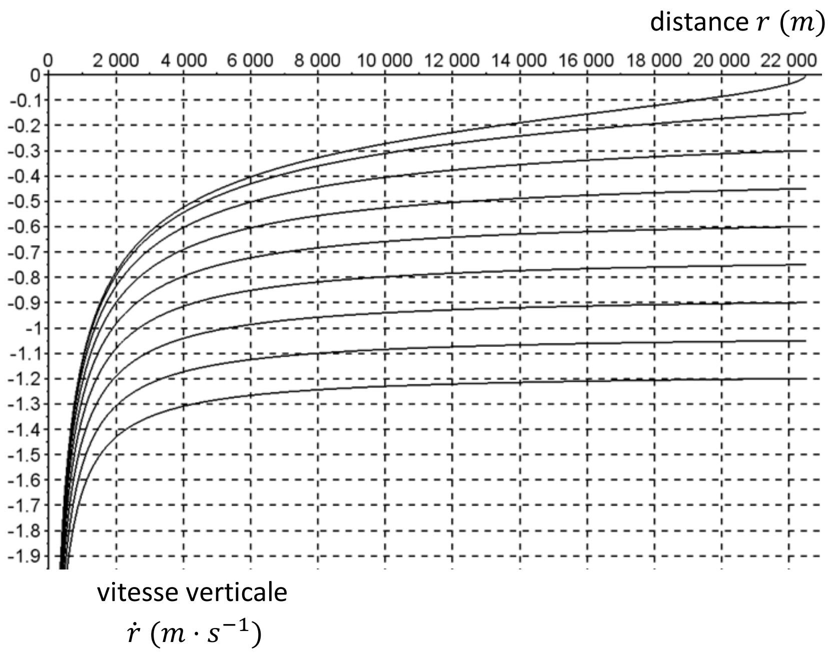


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales